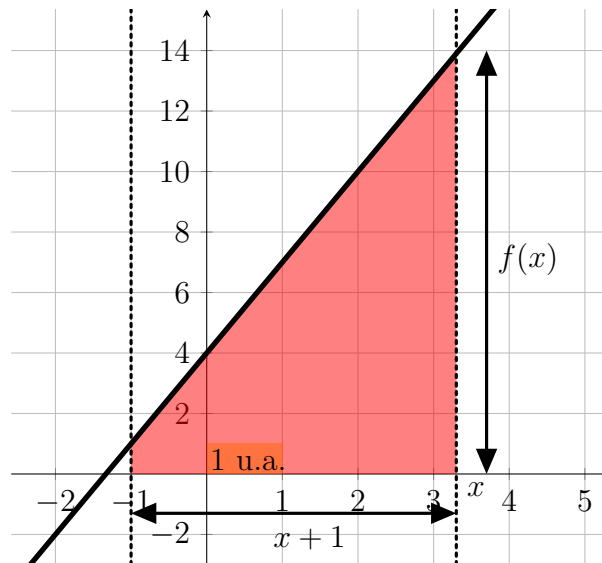


Cours de la séance du mardi 31 mars 2020

Exemple 6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 4$. Soit x un réel supérieur ou égal à -1 .

1. Calculer $I_x = \int_{-1}^x f(t) dt$.
 2. On considère la fonction F qui à tout $x \geq -1$ associe $F(x) = I_x$. Calculer la dérivée de F . Que constate-t-on ?
1. La fonction f est une fonction affine. Sa courbe est donc une droite.
L'aire sous la courbe entre -1 et x est l'aire d'un trapèze :



La petite base vaut 1, la grande base vaut $f(x)$ et la hauteur vaut $x - (-1) = x + 1$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{(1 + f(x)) \times (x + 1)}{2} = \frac{(1 + 3x + 4)(x + 1)}{2} \\ &= \frac{(3x + 5)(x + 1)}{2} = \frac{3x^2 + 3x + 5x + 5}{2} \end{aligned}$$

donc $I_x = \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}$.

2. La fonction $F : x \mapsto \frac{3}{2}x^2 + 4x + \frac{5}{2}$ est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur $[-1; +\infty[$ et, pour tout réel x ,

$$F'(x) = \frac{3}{2} \times 2x + 4 = 3x + 4.$$

Ainsi, pour tout $x \geq -1$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 7

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. Alors, la fonction F définie pour tout $x \in [a; b]$ par

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$$

est dérivable sur $[a; b]$ et, de plus, pour tout $x \in [a; b]$,

$$F'(x) = f(x).$$

Démonstration dans le cas particulier où f est croissante sur $[a; b]$

On suppose donc que f est une fonction continue, croissante et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

Soit $x_0 \in [a; b]$. Pour tout $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a; b]$, on considère le taux de variation de F entre x_0 et $x_0 + h$:

$$t(h) = \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}.$$

Notre but est de montrer que :

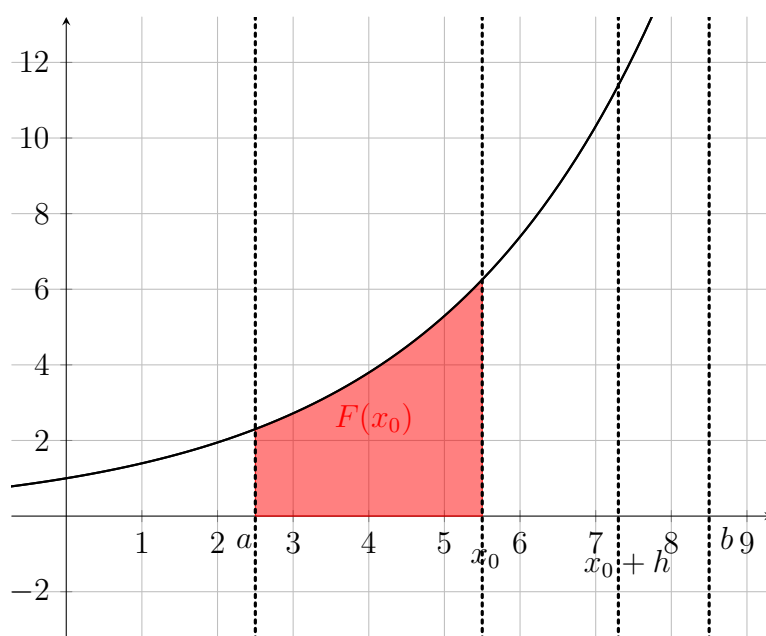
$$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = f(x_0).$$

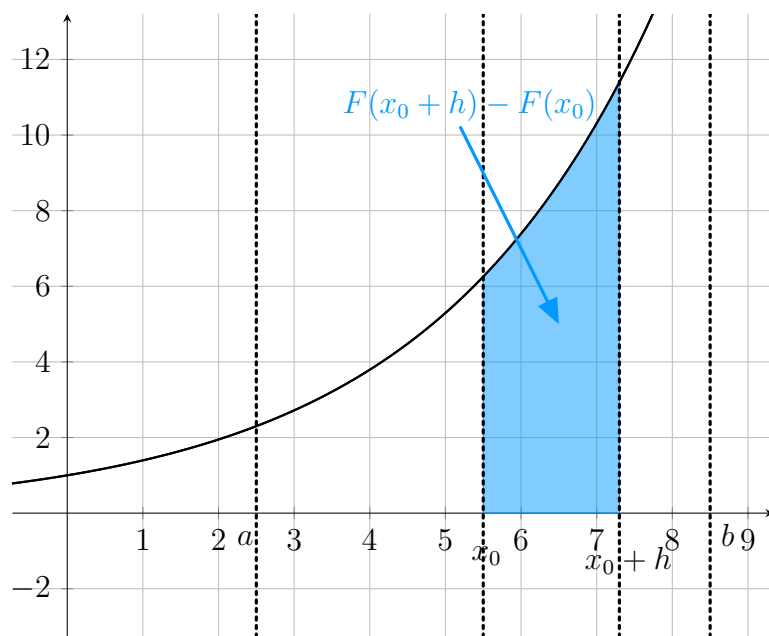
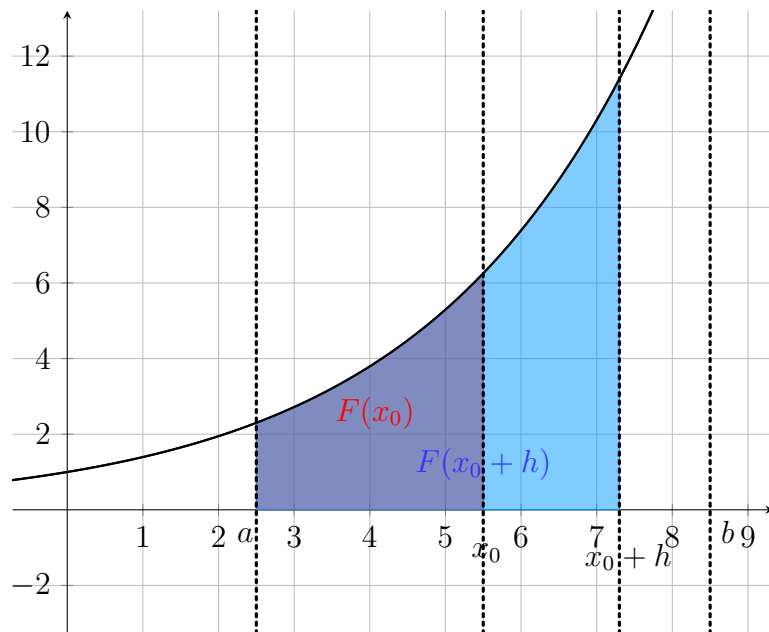
On va distinguer deux cas : $h > 0$ et $h < 0$.

1^{er} cas : on suppose $h > 0$

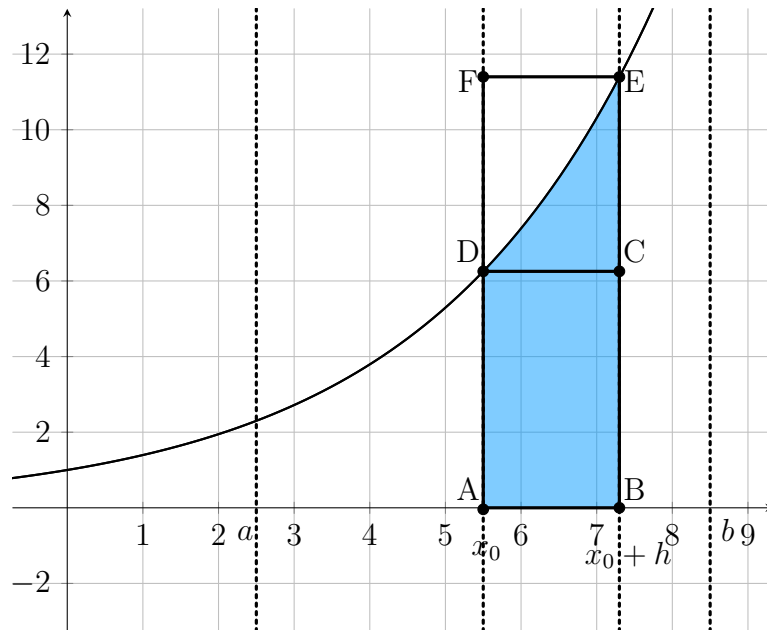
Interprétons graphiquement $F(x_0 + h)$, $F(x_0)$ et $F(x_0 + h) - F(x_0)$.

On sait que $F(x_0 + h)$ est l'aire sous la courbe de f entre a et $x_0 + h$ et que $F(x_0)$ est l'aire sous la courbe de f entre a et x_0 .





On va estimer la surface en bleu en encadrant par deux rectangles dont on sait facilement calculer les aires :



On introduit les points $A(x_0; 0)$, $B(x_0 + h; 0)$, $C(x_0 + h; f(x_0))$, $D(x_0; f(x_0))$, $E(x_0 + h; f(x_0 + h))$ et $F(x_0; f(x_0 + h))$.

Comme $h > 0$, $x_0 < x_0 + h$ et donc, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$.

Ainsi, le segment $[CD]$ est entièrement situé en dessous de la courbe et le segment $[EF]$ est entièrement situé au-dessus de la courbe.

On en déduit que

$$\text{aire}(ABCD) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq \text{aire}(ABEF)$$

Autrement dit,

$$AB \times AD \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq AB \times AF$$

i.e.

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

Comme $h > 0$, en divisant par h ,

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

i.e.

$$f(x_0) \leq t(h) \leq f(x_0 + h)$$

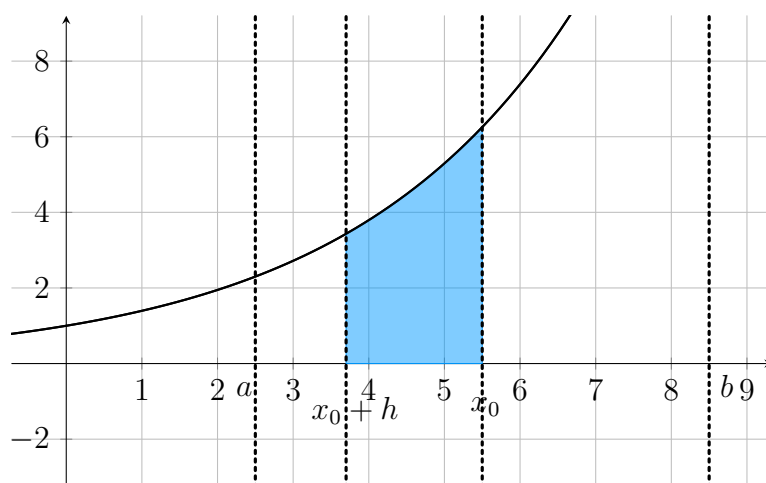
Enfin, comme f est continue en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ donc, grâce au théorème d'enca-drement,

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = f(x_0).$$

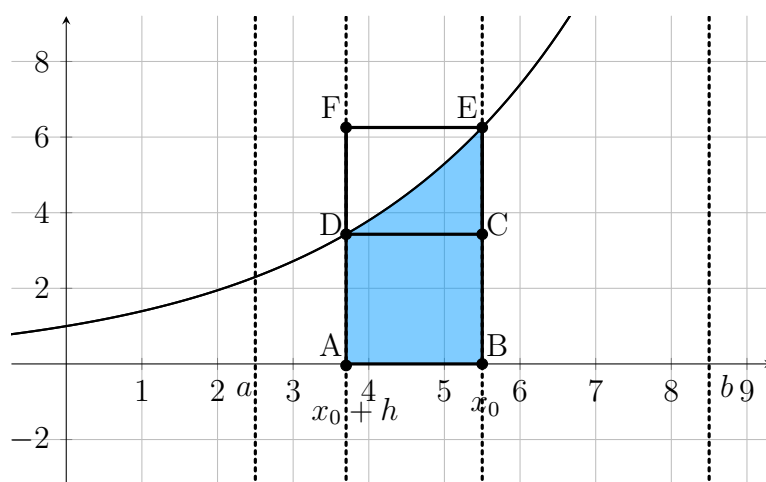
2^{ème} cas : on suppose $h < 0$

L'idée est rigoureusement la même.

La seule chose qui change est le fait que $x_0 + h < x_0$ et donc $f(x_0 + h) < f(x_0)$. Dans ce cas, $F(x_0) - F(x_0 + h)$ correspondant à l'aire en bleu :



On encadre comme précédemment par deux rectangles ABCD et ABEF :



On en déduit que

$$\text{aire}(\text{ABCD}) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq \text{aire}(\text{ABEF})$$

Or, comme $h < 0$, $AB = -h$,

$$(-h) \times f(x_0 + h) \leq F(x_0) - F(x_0 + h) \leq (-h) \times f(x_0)$$

En divisant par $-h > 0$ (car $h < 0$), on obtient

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0) - F(x_0 + h)}{-h} \leq f(x_0)$$

i.e.

$$f(x_0 + h) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0)$$

On aboutit donc à

$$f(x_0 + h) \leq t(h) \leq f(x_0)$$

et on conclut comme dans le premier cas que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = f(x_0).$$

Conclusion

On a montré que

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h > 0}} t(h) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h < 0}} t(h) = f(x_0)$$

donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(h) = f(x_0)$$

comme annoncé.

Ainsi, F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Exemple 10

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : t \mapsto \frac{1}{4}t^4 + \frac{2}{3}t^3 - 5t$ et une primitive de g sur $]0; +\infty[$ est $\ln$.

Preuve de la propriété 11

1. Supposons que G soit une primitive de f sur I . Alors, par définition, F et G sont dérivable sur I donc $G - F$ est dérivable sur I et $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Comme I est un intervalle, on en déduit que la fonction $G - F$ est constante sur I . Ainsi, il existe une constante c telle que $G - F = c$ i.e. $G = F + c$.
Réciproquement, si c est une constante alors $F + c$ est dérivable sur I et $(F + c)' = F' + 0 = f$ donc $F + c$ est une primitive de f sur I .
2. D'après le premier point, toute primitive G de f sur I est de la forme $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$. Dès lors,

$$G(x_0) = y_0 \Leftrightarrow F(x_0) + c = y_0 \Leftrightarrow c = y_0 - F(x_0)$$

donc la constante c est entièrement déterminée par la condition $G(x_0) = y_0$. Ainsi, il existe une unique primitive G de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$: il s'agit de la fonction $G : x \mapsto F(x) + y_0 - F(x_0)$. ■

Exemple 12. Une primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction $-\cos$. On cherche une constante c tel que $-\cos(0) + c = 0$ i.e. $c = \cos(0) = 1$.

L'unique primitive de $\sin$ sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 est donc la fonction $x \mapsto -\cos(x) + 1$.

Preuve du théorème 13. Le fait que F soit une primitive de f sur $[a; b]$ n'est rien d'autre que le théorème 7. De plus,

$$F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

correspond à l'aire d'un segment. Or, un segment a une aire nulle donc $F(a) = 0$.

Ainsi, grâce à la propriété 11, on peut affirmer que F est l'unique primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a . ■

Preuve du corollaire 14. Soit F une primitive de f sur $[a; b]$ et soit $G : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$. Comme G est une primitive de f sur $[a; b]$, il existe une constante c telle que $G = F + c$. En particulier, $G(a) = F(a) + c$. Or, $G(a) = 0$ donc $c = -F(a)$. Ainsi, pour tout $x \in [a; b]$, $G(x) = F(x) - F(a)$. En particulier, pour $x = b$, $G(b) = F(b) - F(a)$ i.e. $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$. ■

Exemple 15. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F : x \mapsto \frac{x^3}{3}$ donc

$$\int_0^1 x^2 dx = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Preuve du théorème 16 dans la cas d'un intervalle fermé et borné

On considère une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

On admet que f admet un minimum m sur $[a; b]$.

Alors, pour tout réel $x \in [a; b]$, $f(x) \geq m$ donc $f(x) - m \geq 0$.

Considérons la fonction $g : x \mapsto f(x) - m$ définie sur $[a; b]$. Alors, comme f est continue sur $[a; b]$, g est également continue sur $[a; b]$. De plus, par hypothèse, pour tout réel $x \in [a; b]$, $g(x) \geq 0$. Ainsi, g est une fonction continue et positive sur $[a; b]$ donc, d'après le théorème 13, g admet une primitive G sur $[a; b]$.

Considérons alors la fonction $F : x \mapsto G(x) + mx$ définie sur $[a; b]$. La fonction F est dérivable sur $[a; b]$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [a; b]$,

$$F'(x) = G'(x) + m = g(x) + m = f(x) - m + m = f(x)$$

donc F est une primitive de f sur $[a; b]$. ■

Preuve de la propriété 18

1. La fonction $F + G$ est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables et $(F + G)' = F' + G' = f + g$ donc $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
2. La fonction kF est dérivable sur I comme produit d'une fonction dérivable et d'une constante et $(kF)' = kF' = kf$ donc kF est une primitive de kf sur I . ■

Exemple 19. Une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^2$ est $x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto e^x$ est $x \mapsto e^x$ donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de f est $F : x \mapsto -5 \times \frac{x^3}{3} + 3 \times e^x$ i.e. $F : x \mapsto -\frac{5}{3}x^3 + 3e^x$.

Remarque. Dans le tableau des primitives usuelles, il manque un $+c$ à la troisième ligne deuxième colonne après $-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$.

De même, dans le tableau des formes particulières, il manque un $+c$ à la dernière ligne deuxième colonne après $x \mapsto \frac{1}{a}u(ax + b)$.