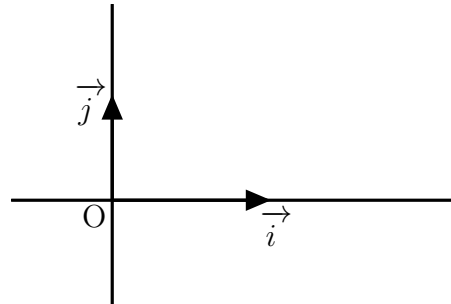


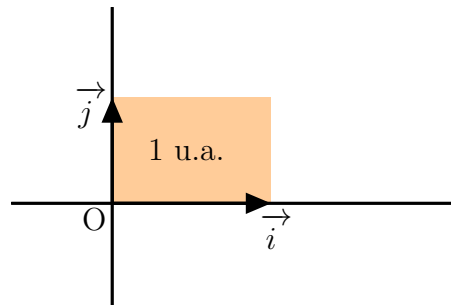
## Cours de la séance du vendredi 27 mars 2020

Le plan est muni d'un repère orthogonal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



Ainsi, l'axe des abscisses est muni d'une unité qui est la norme de  $\vec{i}$  et l'axe des ordonnées est muni d'une unité qui est la norme de  $\vec{j}$ .

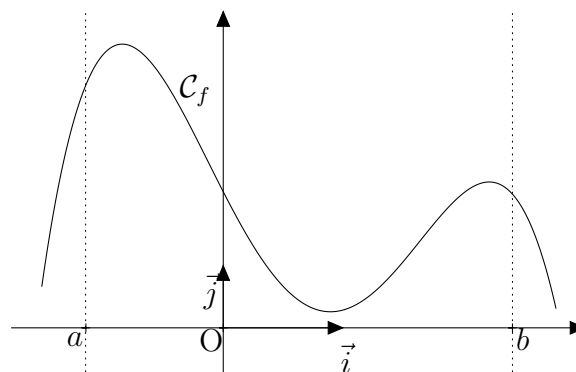
Dès lors, le plan est naturellement muni d'une unité d'aire :  $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$ .



Une unité d'aire (u.a.) est donc l'aire d'un rectangle de côté 1 sur 1.

On considère une fonction continue et positive sur un intervalle  $[a; b]$ .

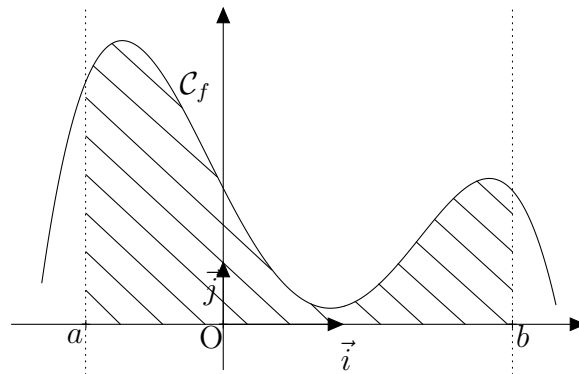
Sa courbe est donc située au-dessus de l'axe des abscisses.



Question : quelle est l'aire, en unité d'aire, de l'aire « sous la courbe » ?

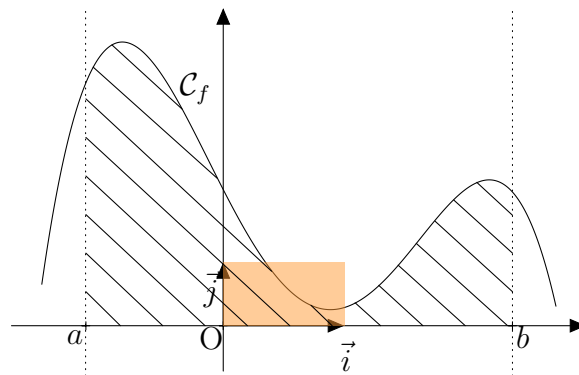
Précisément, qu'est-ce que l'aire « sous la courbe » ?

C'est l'aire de la partie du plan délimitée en bas par l'axe des abscisses, en haut par la courbe  $C_f$ , à gauche par la droite d'équation  $x = a$  et à droite par la droite d'équation  $x = b$ .



Autrement dit, la question de l'on se pose est la suivante :

Combien d'unités d'aires représente l'aire hachurée i.e. combien de rectangles oranges représente l'aire sous la courbe ?



### Définition 1

Soit  $f$  une fonction **continue et positive** sur un intervalle  $[a; b]$ . On définit l'intégrale de  $a$  à  $b$  de la fonction  $f$  comme l'aire sous la courbe  $C_f$  i.e. la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = a$  et  $x = b$ .

*Remarque 2.* L'intégrale est donc le nombre d'unités d'aire que représente l'aire sous la courbe. En particulier, l'intégrale est un nombre réel **sans unité**. On peut, de plus, démontrer que ce nombre ne dépend pas du repère choisi.

On note l'intégrale de  $f$  entre  $a$  et  $b$  de la manière suivante :

$$\int_a^b f(x) dx$$

**Exemple 3.** Déterminer les intégrales suivantes à l'aide de représentations graphiques :

$$I_1 = \int_{-1}^5 4 dx$$

$$I_2 = \int_0^3 2t + 1 dt$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} du$$

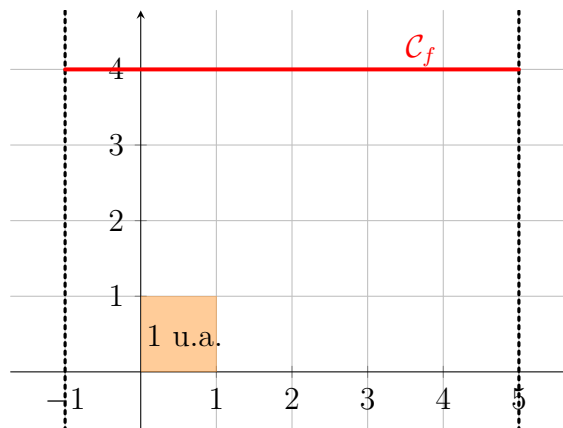
Calculer une intégrale n'est en général pas une chose simple. Le but de tout notre chapitre est justement de donner les outils nécessaires pour effectuer ce calcul dans un grand nombre de cas (mais pas dans tous les cas, il y a même des intégrales que l'on ne sait pas calculer).

Dans ces trois premiers exemples simples, on va calculer les intégrales en utilisant seulement la définition.

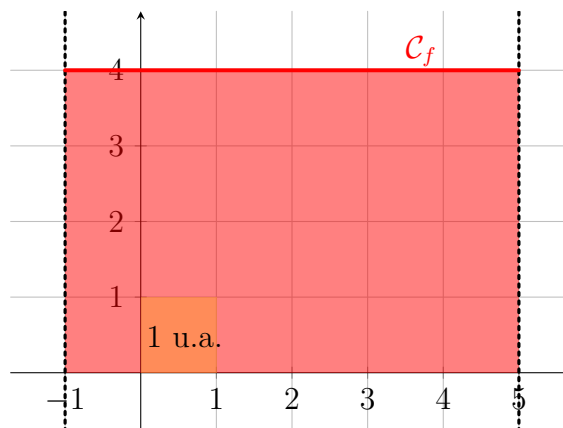
$$I_1 = \int_{-1}^5 4 \, dx$$

On considère la fonction  $f : x \mapsto 4$  définie sur  $[-1; 5]$ .

C'est une fonction constante : sa courbe est un segment de droite horizontal.



Ainsi, l'aire sous la courbe est l'aire d'un rectangle.

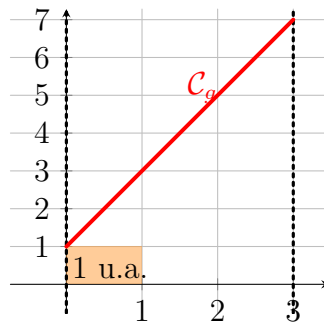


Ainsi,  $I_1 = \int_{-1}^5 4 \, dx = 6 \times 4 = 24$ .

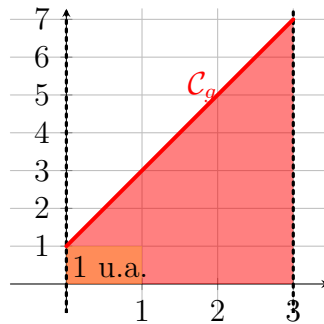
$$I_2 = \int_0^3 2t + 1 \, dt$$

On considère la fonction  $g : t \mapsto 2t + 1$  définie sur  $[0; 3]$ .

La fonction  $g$  est affine donc sa courbe est un segment de droite.



Ici, il s'agit donc de calculer l'aire d'un trapèze rectangle.



Rappel : l'aire d'un trapèze est donné par  $\frac{(b + B) \times h}{2}$  où  $b$  est la petite base,  $B$  est la grande base et  $h$  est la hauteur.

$$\text{Ainsi, } I_2 = \int_0^3 2t + 1 \, dt = \frac{(1 + 7) \times 3}{2} = 12.$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \, du$$

On considère la fonction  $h : u \mapsto \sqrt{1 - u^2}$  définie sur  $[0 ; 1]$ .

Ici, la nature de la courbe de  $h$  est moins évidente.

Remarquons cependant que

$$M(x ; y) \in \mathcal{C}_h \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \sqrt{1 - x^2} \end{cases}$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1 - u^2} \, du$$

On considère la fonction  $h : u \mapsto \sqrt{1 - u^2}$  définie sur  $[0 ; 1]$ .

Ici, la nature de la courbe de  $h$  est moins évidente.

Remarquons cependant que

$$M(x ; y) \in \mathcal{C}_h \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \sqrt{1 - x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y^2 = 1 - x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du$$

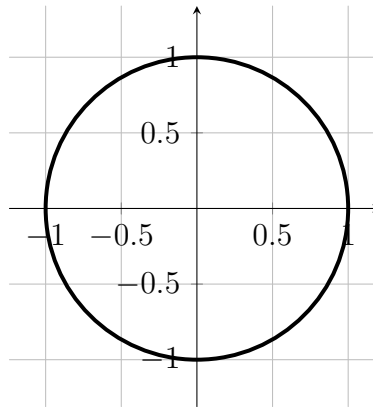
On considère la fonction  $h : u \mapsto \sqrt{1-u^2}$  définie sur  $[0; 1]$ .

Ici, la nature de la courbe de  $h$  est moins évidente.

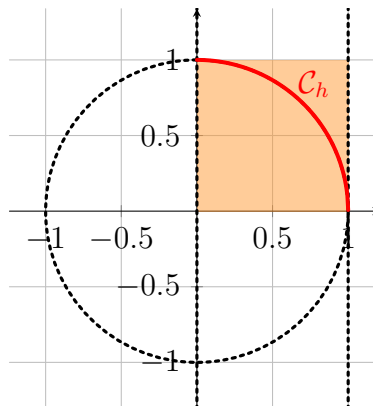
Remarquons cependant que

$$\begin{aligned} M(x; y) \in \mathcal{C}_h &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y = \sqrt{1-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ y^2 = 1-x^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

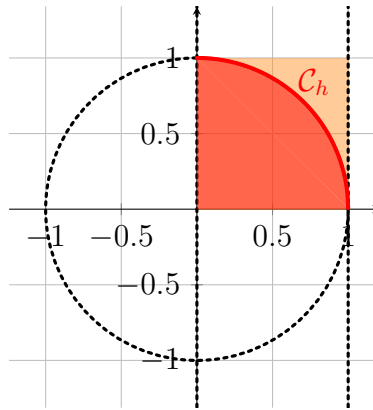
On reconnaît l'équation du cercle de centre O et de rayon 1 :  $x^2 + y^2 = 1$  dans un repère orthonormé.



Mais, avec les conditions supplémentaires  $0 \leq x \leq 1$  et  $y \geq 0$ , on conclut que la courbe de  $h$  est un quart de cercle.



Ainsi, l'aire sous la courbe de  $h$  est l'aire d'un quart de disque de rayon 1 :



i.e.  $I_3 = \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du = \frac{1}{4} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}.$

*Remarque 4.*

1. On peut généraliser facilement le calcul de  $I_1$  : si  $m$  est un réel positif alors  $\int_a^b m \, dx = m(b-a).$
2. La variable  $x$  dans l'écriture  $\int_a^b f(x) \, dx$  est une variable *muette* : on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable sans changer la valeur de l'intégrale. Ainsi,  $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(t) \, dt = \int_a^b f(s) \, ds...$

Ceci vient simplement du fait que le nom de la variable dans une fonction n'a aucune importance. Ainsi, les fonctions  $x \mapsto x^2 + 3$ ,  $t \mapsto t^2 + 3$ ,  $s \mapsto s^2 + 3$  sont rigoureusement égales.