

Propriété 1. — Formule d'intégration par parties

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit u et v deux fonctions définies et dérivables $[a; b]$. On suppose, de plus, que les fonctions u' et v' sont continues sur $[a; b]$. Alors,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Démonstration. Comme u et v sont dérivables sur $[a; b]$, la fonction uv est dérivable sur $[a; b]$ et $(uv)' = u'v + uv'$. Dès lors, on a $uv' = (uv)' - u'v$. Comme u , v , u' et v' sont continues sur $[a; b]$, il en est de même de uv' , uv et $u'v$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x) \, dx$$

et, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = \int_a^b (uv)'(x) \, dx - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

Or, par définition, uv est une primitive de $(uv)'$ donc

$$\int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx.$$

□

La formule d'intégration par parties est intéressante si :

1. on ne sait pas trouver directement une primitive de uv' sur $[a; b]$;
2. on connaît une primitive de v sur $[a; b]$;
3. La dérivée de u est « plus simple » que u et/ou on sait déterminer une primitive de $u'v$ sur $[a; b]$.

Exemple 2. Calculer $I = \int_0^1 xe^x \, dx$.

Ici, on va poser $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto 1$ et $v : x \mapsto e^x$.

Ainsi, u et v sont dérivables sur $[0; 1]$ et u' et v' sont continues sur $[0; 1]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties,

$$I = \int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x \, dx = e - 0 - \int_0^1 e^x \, dx = e - [e^x]_0^1 = e - (e - 1)$$

donc $\boxed{I = 1}$.

Exemple 3. Déterminer une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

Par théorème, l'unique primitive de $\ln$ que $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est

$$F : x \mapsto \int_1^x \ln(t) \, dt.$$

Soit $x > 0$. On va calculer $F(x)$ par intégration par parties en écrivant

$$F(x) = \int_1^x \ln(t) \times 1 \, dt$$

On considère alors les fonctions $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont bien dérivables et leurs dérivées continues sur $[1; x]$ donc, grâce à la formule d'intégration par parties :

$$F(x) = [\ln(t) \times t]_1^x - \int_1^x \frac{1}{t} \times t \, dt = \ln(x) \times x - \ln(1) \times 1 - \int_1^x 1 \, dt = x \ln(x) - 1 \times (x - 1).$$

On conclut que la primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1 est $F : x \mapsto x \ln(x) - x + 1$.

Remarque. Une autre primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto x \ln(x) - x$.

Exemple 4. Calculer $J = \int_0^\pi \sin(x) e^x \, dx$.

Intégrons par parties en considérant $u : x \mapsto \sin(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto \cos(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables à dérivée continues sur $[0; \pi]$ donc

$$J = \int_0^\pi \sin(x) e^x \, dx = [\sin(x) e^x]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x) e^x \, dx = - \int_0^\pi \cos(x) e^x \, dx$$

car $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$. Procédons à une seconde intégration par parties pour cette nouvelle intégrale en considérant $u : x \mapsto \cos(x)$ et $v' : x \mapsto e^x$ de telle sorte que $u' : x \mapsto -\sin(x)$ et $v : x \mapsto e^x$. Ainsi, u et v sont des fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; \pi]$ donc

$$\int_0^\pi \cos(x) e^x \, dx = [\cos(x) e^x]_0^\pi - \int_0^\pi -\sin(x) e^x \, dx = \cos(\pi) e^\pi - \cos(0) e^0 + \int_0^\pi \sin(x) e^x \, dx = -e^\pi - 1 + J.$$

On a donc $J = -(-e^\pi - 1 + J) = e^\pi + 1 - J$ i.e. $2J = e^\pi + 1$ et ainsi $J = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

Exemple 5. Calculer $K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \, dt$.

Écrivons, comme dans l'exemple 3,

$$K = \int_0^{e-1} \ln(1+t) \times \textcolor{red}{1} \, dt$$

et intégrons par parties en considérant $u : t \mapsto \ln(1+t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ et $v : t \mapsto t$. Les fonctions u et v sont dérivables à dérivées continues sur $[0; e-1]$ donc

$$K = [\ln(1+t) \times t]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times t \, dt = \ln(1+e-1) \times (e-1) - \ln(1) \times 0 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} \, dt$$

i.e.

$$K = e - 1 - \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} \, dt.$$

Comment calculer $L = \int_0^{e-1} \frac{t}{1+t} \, dt$?

Une astuce consiste à remarquer que

$$L = \int_0^{e-1} \frac{t + \textcolor{red}{1} - \textcolor{red}{1}}{1+t} \, dt = \int_0^{e-1} \frac{t+1}{1+t} - \frac{1}{1+t} \, dt = \int_0^{e-1} 1 - \frac{1}{1+t} \, dt = [t - \ln(1+t)]_0^{e-1}$$

donc

$$L = e - 1 - \ln(1+e-1) - (0 - \ln(1)) = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Finalement, on conclut que $K = e - 1 - (e - 2)$ i.e. $K = 1$.

En fait, on aura pu être plus malin dans l'intégration par parties sur le choix de la primitive de $v' : t \mapsto 1$. On a choisi $v : t \mapsto t$ mais on aurait eu intérêt à plutôt prendre $v : t \mapsto t + 1$. En effet, avec ce choix, l'intégration par parties devient :

$$\begin{aligned} K &= [\ln(1+t) \times (t+1)]_0^{e-1} - \int_0^{e-1} \frac{1}{1+t} \times (t+1) \, dt \\ &= \ln(1+e-1) \times (e-1+1) - \ln(1) \times (0+1) - \int_0^{e-1} 1 \, dt \\ &= e-1 \times (e-1) \end{aligned}$$

et on obtient directement $\boxed{K = 1}$.