

Cours de la séance du mardi 24 mars 2020

L'idée du paragraphe III du cours est de donner un moyen de caractériser une droite ou un plan de l'espace à l'aide des coordonnées.

Le principe général est simple : une droite est entièrement déterminée par la connaissance d'un point et d'un vecteur directeur et, de même, un plan est entièrement défini par la connaissance d'un point et d'un couple de vecteurs directeurs du plan.

Preuve de la propriété 41

Un point $M(x; y; z)$ appartient à la droite Δ si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires i.e. comme $\vec{u} \neq \vec{0}$ si et seulement s'il existe réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$. Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$ et les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(a; b; c)$ donc, en coordonnées, $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - x_A = ta \\ y - y_A = tb \\ z - z_A = tc \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

Ainsi, on conclut que M appartient à Δ si et seulement s'il existe un réel t tel que $\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$. ■

À RETENIR :

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases}$$

coordonnées d'un point
quelconque de Δ coordonnées d'un
point particulier de Δ coordonnées d'un vecteur
directeur de Δ

Exemple 43

1. Pour déterminer une représentation paramétrique de (AB) , il nous faut les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de (AB) . Pour le point, on peut prendre $A(1; -2; 3)$ et, pour le vecteur directeur, on peut prendre $\overrightarrow{AB}(-1; 2; -2)$. Ainsi, une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + 2t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 2t \end{cases}$
2. Pour tester si un point appartient ou non à la droite (AB) , on examine s'il existe ou non un paramètre qui donne ses coordonnées dans la représentation paramétrique.

Pour C , on résout donc le système :

$$\begin{cases} -3 = 1 - t \\ 6 = -2 + 2t \\ -5 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ 2t = 8 \\ 2t = 8 \end{cases} \Leftrightarrow t = 4$$

Ainsi, C est le point de paramètre $t = 4$ donc $C \in (AB)$. (Remarque : on a donc $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$).

De même, pour D , on résout le système :

$$\begin{cases} 2 = 1 - t \\ -5 = -2 + 2t \\ 5 = 3 - 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 & (1) \\ 2t = -3 & (2) \\ 2t = -2 & (3) \end{cases}$$

Les équations (2) et (3) sont incompatibles (et elles sont aussi incompatibles avec (1), mais peu importe) donc D n'appartient pas à (AB) .

3. Pour obtenir une autre représentation paramétrique de (AB) , il suffit de prendre un autre point ou/et un autre vecteur directeur. On peut, par exemple, prendre le point $B(0; 0; 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{AB}(-1; 2; -2)$, on obtient alors la représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ On peut également prendre le point } C(-3; 6; -5) \text{ (puisque'on a}$$

vu qu'il appartient à (AB)) et le vecteur $\overrightarrow{BA}(1; -2; 2)$ et on obtient la représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 6 - 2t \\ z = -5 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Il y a une infinité d'autres possibilités!}$$

4. Commençons par remarquer que le paramètre de Δ s'appelle s et non pas t . La lettre choisie pour le paramètre n'a aucune importance. Cependant, quand on a plusieurs représentations paramétriques dans un même exercice, il est indispensable de choisir des lettres différentes pour celles-ci si on ne veut pas faire de graves erreurs ou confusions. (En effet, choisir la même lettre revient à présupposer que les paramètres sont égaux, ce qui n'a aucune raison d'être le cas).

Donnons la méthode générale pour étudier la position relative de deux droites. On sait que deux droites dans l'espace sont soit non coplanaires, soit sécantes en un point, soit strictement parallèles, soit confondues.

On commence par examiner si les droites sont parallèles ou confondues en regardant les vecteurs directeurs. Dans notre cas, un vecteur directeur de (AB) est $\overrightarrow{AB}(-1; 2; -2)$ et un vecteur directeur de Δ est $\vec{v}(2; 3; 1)$ (on l'obtient en prenant les coefficients de s dans la représentation paramétrique). Comme $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\vec{v}} = -1 \times 3 = -3 \neq 4 = 2 \times 2 = x_{\vec{v}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les droites (AB) et Δ , ne sont ni parallèles ni confondues.

Elles sont donc soit sécantes en un point soit non coplanaires. Pour le savoir, on cherche l'intersection des deux droites. Pour cela, on égale les deux représentations paramétriques

et on résout le système obtenu :

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 1 - t = -1 + 2s \\ -2 + 2t = 3s \\ 3 - 2t = 2 + s \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - 2s \\ -2 + 2t = 3s \\ 3 - 2t = 2 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - 2s \\ -2 + 2(2 - 2s) = 3s \\ 3 - 2(2 - 2s) = 2 + s \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - 2s \\ -2 + 4 - 4s = 3s \\ 3 - 4 + 4s = 2 + s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - 2s \\ 2 = 7s \\ 3s = 3 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 - 2s & (1) \\ s = \frac{2}{7} & (2) \\ s = 1 & (3) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Les égalités (2) et (3) sont incompatibles donc le système n'a pas de solutions. Ceci signifie que l'intersection des deux droites est vide.

On peut donc conclure que (AB) et Δ sont non coplanaires.

Pour résumer, lorsqu'on doit étudier la position relative de deux droites à partir de leurs représentations paramétriques, on commence par étudier si les vecteurs directeurs sont colinéaires :

- s'ils sont colinéaires, les deux droites sont soit strictement parallèles soit confondues. Pour départager entre ces deux cas, il suffit de prendre un point sur l'une des droites et de regarder s'il appartient à l'autre droite. Si c'est le cas, les deux droites ont un point commun et elles sont donc confondues, sinon elles sont parallèles.
- s'ils ne sont pas colinéaires, les deux droites sont soit sécantes soit non coplanaires. Pour départager entre ces deux cas, on forme un système (S) en égalant les deux représentations paramétriques et on résout ce système. Si (S) n'a pas de solution alors l'intersection des deux droites est vide donc les droites sont non coplanaires et si (S) possède une solution (qui est alors unique) alors les droites sont sécantes en un point.

Preuve de la propriété 44

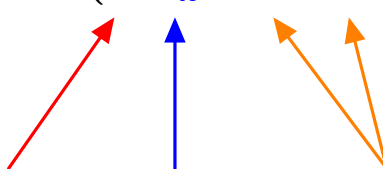
Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan P si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires i.e. comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires si et seulement s'il existe deux réels k et k' tels que $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$. Or, les coordonnées de $\overrightarrow{AM}$ sont $(x - x_A; y - y_A; z - z_A)$, les coordonnées de $\vec{u}$ sont $(a; b; c)$ et celles de $\vec{v}$ sont $(a'; b'; c')$ donc, en coordonnées, $\overrightarrow{AM} = k\vec{u} + k'\vec{v}$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - x_A = ka + k'a' \\ y - y_A = kb + k'b' \\ z - z_A = kc + k'c' \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases}$$

Ainsi, on conclut que M appartient à P si et seulement s'il existe deux réels k et k' tels que

$$\begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases} . \quad \blacksquare$$

À RETENIR :

$$\begin{cases} x = x_A + ka + k'a' \\ y = y_A + kb + k'b' \\ z = z_A + kc + k'c' \end{cases}$$


coordonnées d'un point quelconque de P coordonnées d'un point particulier de P coordonnées de deux vecteurs directeurs de P

Exemple 46

1. Pour montrer que A , B et C définissent un unique plan, on montre que ces points ne sont pas alignés. Pour cela, on prouve que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Or, $\overrightarrow{AB} (1; -1; 1)$ et $\overrightarrow{AC} (3; -1; 2)$ donc $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = 1 \times (-1) = -1 \neq -3 = 3 \times (-1) = x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc A , B et C ne sont pas alignés. Ils définissent ainsi un unique plan P .

De plus, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ forment un couple de vecteurs directeurs (on dit aussi une base) de P donc une représentation paramétrique de P est

$$\begin{cases} x = 0 + k \times 1 + k' \times 3 \\ y = 2 + k \times (-1) + k' \times (-1) \\ z = -1 + k \times 1 + k' \times 2 \end{cases} \quad \text{i.e.}$$

$$\begin{cases} x = k + 3k' \\ y = 2 - k - k' \\ z = -1 + k + 2k' \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } k' \in \mathbb{R}.$$

(Ici, j'ai pris le point A pour la représentation mais on peut évidemment tout aussi bien prendre le point B ou le point C).

2. Comme pour les droites, on teste si un point appartient à un plan en formant un système à l'aide de ses coordonnées.

Pour C :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -3 = k + 3k' \\ 6 = 2 - k - k' \\ -5 = -1 + k + 2k' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 3k' = k \\ k = -4 - k' \\ -4 - 2k' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 - 3k' \\ -3 - 3k' = -4 - k' \\ -4 - 2k' = -3 - 3k' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 - 3k' \\ 1 = 2k' \\ k' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 - 3k' & (1) \\ k' = \frac{1}{2} & (2) \\ k' = 1 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Les égalités (2) et (3) sont incompatibles donc le système n'a pas de solution ce qui signifie que C n'appartient pas à P .

Pour D :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -2 = k + 3k' \\ 2 = 2 - k - k' \\ -2 = -1 + k + 2k' \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 3k' = k \\ k = -k' \\ -1 - 2k' = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 - 3k' = -k' \\ k = -k' \\ -1 - 2k' = -k' \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2k' \\ k = -k' \\ k' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k' = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Le système possède une solution donc D appartient à P (et on peut même affirmer que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$).

3. Comme P' est parallèle à P , $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est également une base de P' . De plus,

$$F(1; -2; 5) \text{ appartient à } P' \text{ donc une représentation paramétrique de } F \text{ est } \begin{cases} x = 1 + k + 3k' \\ y = -2 - k - k' \\ z = 5 + k + 2k' \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$.

4. On sait qu'une droite est soit incluse dans un plan, soit strictement parallèle à ce plan, soit sécante à ce plan. Pour déterminer dans quel cas on se trouve, il suffit de déterminer l'intersection de la droite et du plan. Dans le premier cas, l'intersection est la droite entière, dans le second, l'intersection est vide et dans le troisième, l'intersection se réduit à un point.

Pour cela, on forme un système de trois équations à trois inconnues en égalant la représentation paramétrique de Δ et celle du plan P :

$$(S) \begin{cases} k + 3k' = -1 + 2s \\ 2 - k - k' = 3s \\ -1 + k + 2k' = 2 + s \end{cases}$$

Il y a trois possibilités pour un tel système : soit il a une infinité de solutions (dans ce cas, Δ est incluse dans P), soit il n'a aucune solution (dans ce cas, Δ est strictement parallèle à P), soit elle admet une unique solution (dans ce cas, Δ est sécante à P).

Réolvons (S) :

$$\begin{aligned}
(S) \begin{cases} k + 3k' = -1 + 2s \\ 2 - k - k' = 3s \\ -1 + k + 2k' = 2 + s \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2s - 3k' \\ 2 - (-1 + 2s - 3k') - k' = 3s \\ -1 + (-1 + 2s - 3k') + 2k' = 2 + s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2s - 3k' \\ 3 - 2s + 2k' = 3s \\ -2 + 2s - k' = 2 + s \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2s - 3k' \\ 3 - 5s + 2k' = 0 \\ s = 4 + k' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2s - 3k' \\ 3 - 5(4 + k') + 2k' = 0 \\ s = 4 + k' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2s - 3k' \\ -17 - 3k' = 0 \\ s = 4 + k' \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2s - 3(-\frac{17}{3}) \\ k' = -\frac{17}{3} \\ s = 4 - \frac{17}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + 2(-\frac{5}{3}) + 17 \\ k' = -\frac{17}{3} \\ s = -\frac{5}{3} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{38}{3} \\ k' = -\frac{17}{3} \\ s = -\frac{5}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le système (S) possède une unique solution donc l'intersection de P et Δ est réduite à un point i.e. P et Δ sont sécantes.

ATTENTION! Le point d'intersection I n'est pas le point de coordonnées $(\frac{38}{3}; -\frac{17}{3}; -\frac{5}{3})$. En effet, le système précédent nous a permis de trouver les paramètres du point d'intersection mais pas ses coordonnées. Pour déterminer celles-ci, il suffit de remplacer s par $-\frac{5}{3}$ dans la représentation paramétrique de (S) :

$$\begin{cases} x_I = -1 + 2(-\frac{5}{3}) = -\frac{13}{3} \\ y_I = -5 \\ z_I = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ainsi, le point d'intersection est le point $I(-\frac{13}{3}; -5; \frac{1}{3})$. On peut également obtenir ces coordonnées en remplaçant k par $\frac{38}{3}$ et k' par $-\frac{17}{3}$ dans la représentation paramétrique de P mais c'est plus long. Cela peut cependant permettre de vérifier que le résultat est correct.

Remarque. Pour terminer, une remarque pour vous rassurer. L'exemple précédent est assez long est calculatoire. Dans les exercices, les données sont souvent choisies pour fournir des calculs plus simples.

De plus, cette méthode est particulière lourde et peu efficace. Nous verrons dans un prochain chapitre une autre méthode beaucoup plus efficace. Du coup, nous ne ferons pas beaucoup d'exemples de ce type car nous aurons bientôt de bien meilleurs outils!

Courage et bravo si vous avez lu tout ce qui précède!