

Cours de la séance du jeudi 19 mars 2020

- Dans la définition 32, ajouter en dessous des trois repères (de gauche à droite) :
repère quelconque repère orthogonal repère orthonormé

- Le **théorème 33** est admis.

- En haut de la page 6, à côté de la figure et en dessous de VOCABULAIRE, ajouter :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Preuve de la propriété 34

1. Si $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$ alors $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ donc $\vec{u} = \vec{v}$. Inversement, si $\vec{u} = \vec{v}$ alors, comme les coordonnées d'un vecteur dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont uniques, $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

2. Par définition,

$$\vec{u} + \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j} + (z + z')\vec{k}$$

donc les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $(x + x'; y + y'; z + z')$.

3. On a $-\vec{u} = -(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (-x)\vec{i} + (-y)\vec{j} + (-z)\vec{k}$ donc les coordonnées de $-\vec{u}$ sont $(-x; -y; -z)$.

4. On a $k\vec{u} = k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = (kx)\vec{i} + (ky)\vec{j} + (kz)\vec{k}$ donc les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx; ky; kz)$.

5. Par la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j} + z_B\vec{k} - (x_A\vec{i} + y_A\vec{j} + z_A\vec{k}) \\ &= (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}\end{aligned}$$

donc les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

6. D'après la propriété 16, $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ donc, en coordonnées, cela donne $x_I - x_A = x_B - x_I$, $y_I - y_A = y_B - y_I$ et $z_I - z_A = z_B - z_I$ i.e. $2x_I = x_A + x_B$, $2y_I = y_A + y_B$ et $2z_I = z_A + z_B$.
On conclut donc que les coordonnées de I sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$. ■

Exemple 35 Comme ABCDEFGH est un cube, le point E n'appartient pas au plan (ABD) donc les points A, B, D et E sont non coplanaires. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ sont non coplanaires et donc $(\vec{A}; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère de l'espace.

Ensuite, les droites (AB), (AD) et (AE) sont deux à deux perpendiculaires donc le repère est orthogonal.

Enfin, par hypothèse, $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AE}\| = 1$ donc on conclut que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Pour déterminer les coordonnées d'un point M dans ce repère, on décompose le vecteur $\overrightarrow{AM}$ selon les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Comme $\overrightarrow{AA} = 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE}$, $A(0; 0; 0)$.

De même,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} &= 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} \text{ donc } B(1; 0; 0); \\
\overrightarrow{AC} &= 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} \text{ donc } C(1; 1; 0); \\
\overrightarrow{AD} &= 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 0\overrightarrow{AE} \text{ donc } D(0; 1; 0); \\
\overrightarrow{AE} &= 0\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} \text{ donc } E(0; 0; 1); \\
\overrightarrow{AF} &= 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} \text{ donc } F(1; 0; 1); \\
\overrightarrow{AG} &= 1\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} \text{ donc } G(1; 1; 1); \\
\overrightarrow{AH} &= 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AD} + 1\overrightarrow{AE} \text{ donc } H(0; 1; 1);
\end{aligned}$$

Preuve du corollaire 36

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ deux vecteurs de l'espace.

Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $x = y = z = 0$ donc $x = 0 \times x'$, $y = 0 \times y'$ et $z = 0 \times z'$ et ainsi les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles. Sinon, il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Or, les coordonnées de $k\vec{u}$ sont $(kx; ky; kz)$ donc $x' = kx$, $y' = ky$ et $z' = kz$ i.e. les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

Réciproquement, supposons que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles. Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors, par définition, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Sinon, il existe au moins une coordonnée de $\vec{u}$ qui n'est pas nulle. Par exemple, $x \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x'}{x}$ de telle sorte que $x' = kx$. Comme les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles, on a alors également $y' = ky$ et $z' = kz$. On en déduit que $\vec{v} = k\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. ■

Exemple 37

Les coordonnées de B sont $(1; 0; 0)$ et celles de H sont $(0; 1; 1)$.

Déterminons les coordonnées de K. Pour cela, déterminons d'abord les coordonnées du milieu I de [GH]. Comme $G(1; 1; 1)$ et $H(0; 1; 1)$, les coordonnées de I sont $(\frac{1+0}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{1+1}{2})$ i.e. $(\frac{1}{2}; 1; 1)$. Ainsi, les coordonnées de $\overrightarrow{AI}$ sont aussi $(\frac{1}{2}; 1; 1)$ (car A est l'origine du repère) et, comme $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$, les coordonnées de $\overrightarrow{AK}$ sont $(\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}; \frac{2}{3} \times 1; \frac{2}{3} \times 1)$ i.e. $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$. Comme A est l'origine du repère, on en déduit que les coordonnées de K sont aussi $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$.

Il s'ensuit que $\overrightarrow{BK}(\frac{1}{3} - 1; \frac{2}{3} - 0; \frac{2}{3} - 0)$ i.e. $\overrightarrow{BK}(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ et $\overrightarrow{BH}(0 - 1; 1 - 0; 1 - 0)$ i.e. $\overrightarrow{BH}(-1; 1; 1)$. On conclut donc que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BH}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires et ainsi les points B, K et H sont alignés.

Pour montrer que les points I, G, K et B sont coplanaires, on considère les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BG}$. On a $\overrightarrow{BI}(\frac{1}{2} - 1; 1 - 0; 1 - 0)$ donc $\overrightarrow{BI}(-\frac{1}{2}; 1; 1)$, $\overrightarrow{BK}(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ et $\overrightarrow{BG}(1 - 1; 1 - 0; 1 - 0)$ i.e. $\overrightarrow{BG}(0; 1; 1)$.

Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires. Pour cela, il suffit de montrer que leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Une méthode très efficace pour cela est de montrer qu'aux moins deux produits croisés des coordonnées ne sont pas égaux. Par exemple, si on montre que $x_{\overrightarrow{BI}} \times y_{\overrightarrow{BG}} \neq x_{\overrightarrow{BG}} \times y_{\overrightarrow{BI}}$ cela suffit à montrer que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas proportionnelles et qu'ainsi ces vecteurs ne sont pas colinéaires. Dans notre cas, $x_{\overrightarrow{BI}} \times y_{\overrightarrow{BG}} = (-\frac{1}{2}) \times 1 = -\frac{1}{2}$ et $x_{\overrightarrow{BG}} \times y_{\overrightarrow{BI}} = 0 \times 1 = 0$ donc $x_{\overrightarrow{BI}} \times y_{\overrightarrow{BG}} \neq x_{\overrightarrow{BG}} \times y_{\overrightarrow{BI}}$ et ainsi $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires.

Il s'ensuit que les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux

réels a et b tels que $\overrightarrow{BK} = a\overrightarrow{BI} + b\overrightarrow{BG}$. En coordonnées, cette égalité s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} = a \times (-\frac{1}{2}) + b \times 0 \\ \frac{2}{3} = a \times 1 + 1 \times b \\ \frac{2}{3} = a \times 1 + b \times 1 \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} -\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a \\ \frac{2}{3} = a + b \\ \frac{2}{3} = a + b \end{cases}$$

Les deux dernières équations étant identiques, ce système équivaut à $\begin{cases} -\frac{2}{3} = -\frac{1}{2}a \\ \frac{2}{3} = a + b \end{cases}$ c'est-à-dire

$$\begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = \frac{2}{3} - a \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ b = -\frac{2}{3} \end{cases}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BI}$, $\overrightarrow{BK}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires donc les points I, G, K et B sont coplanaires.

Remarques

1. On retrouve la même relation vectorielle $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$ que dans la méthode purement vectorielle (voir le cours de mardi 17).
2. Retenir la méthode suivante : pour montrer que deux vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{u}(x'; y'; z')$ sont non colinéaires, on montre que $xy' \neq yx'$ (ou que $xz' \neq zx'$ ou que $yz' \neq zy'$).
Attention cependant, il ne suffit pas que $xy' = yx'$ pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Par exemple, si $\vec{u}(0; 1; 2)$ et $\vec{v}(0; 2; 1)$ alors $0 \times 2 = 1 \times 0$ mais les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires car $1 \times 1 \neq 2 \times 2$.
3. Retenir la méthode suivante : pour étudier si 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :
 - a. on en prend deux quelconques, par exemple $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on étudie s'ils sont colinéaires par la méthode précédente. Si c'est le cas, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.
 - b. Si ce n'est pas le cas, on étudie l'existence de deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. On écrit cette égalité en coordonnées et on obtient un système de 3 équations à 2 inconnues.
Si ce système possède une solution alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Sinon (on obtiendra alors une absurdité sur l'une des trois équations), les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.