

Preuve de la remarque 23, point 2.

On montre la contraposée du résultat, à savoir : trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels non tous nuls a , b et c tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Supposons que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Alors, on a deux cas possibles :

1. soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et alors, d'après la remarque 18, il existe deux réels non tous les deux nuls a et b tels que $a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}$. Posons $c = 0$. Dès lors, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ et les réels a , b et c ne sont pas tous nuls (puisque au moins a ou b n'est pas nul).
2. soit il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Posons $c = -1$. Alors, $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ et a , b et c ne sont pas tous nuls puisque $c \neq 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe trois réels non tous les trois nuls tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$. Alors, par exemple $a \neq 0$ donc $\vec{u} = \frac{-b}{a}\vec{v} + \frac{-c}{a}\vec{w}$ donc $\vec{u}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}$ et $\vec{w}$ donc $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires. Le raisonnement est identique si $b \neq 0$ ou si $c \neq 0$ (en écrivant alors $\vec{v}$ ou $\vec{w}$ comme combinaison linéaire des deux autres vecteurs).

On a donc montré que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels non tous nuls a , b et c tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$.

Par contraposition on en déduit que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires équivaut à dire que si a , b et c sont trois réels tels que $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ alors $a = b = c$. Comme, de plus, il est clair que si $a = b = c = 0$ alors $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$, on conclut que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires équivaut à dire que, pour tous réels a , b et c , $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ si et seulement si $a = b = c$. ■

Preuve du théorème 24

Supposons que les points A, B, C et D appartiennent à un même plan. Si les points A, B et C sont alignés alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires donc, par définition (cf. le point 1. de la remarque 23), les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Sinon, les points A, B et C définissent un unique plan $\mathcal{P}$ et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan (cf. la remarque 21). Le point D appartient à $\mathcal{P}$: notons a et b ses coordonnées dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Alors, par définition, $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Réciproquement, supposons que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires. Distinguons deux cas.

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires alors les points A, B et C sont alignés. Il existe au moins un plan contenant les points A, B et D. Mais alors la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}$ et donc, comme C appartient à (AB), C appartient à $\mathcal{P}$.

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires alors il existe des réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. Mais, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires, les points A, B et C définissent un unique plan $\mathcal{P}$ et $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan. De plus, comme $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$, D est le point ayant $(a; b)$ pour coordonnées dans ce repère donc D appartient à $\mathcal{P}$.

Ainsi, dans tous les cas, Ainsi, les points A, B, C et D appartiennent à un même plan $\mathcal{P}$. ■

Exemple 25

On a montré dans l'exemple 20 que $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BH}$.

Montrons que $\overrightarrow{BK}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BI}$. Pour cela, remarquons que

$$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IH}) = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}\right) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GH}$$

i.e. $3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{GH}$. Or, $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GH}$ donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{BH} - \overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BG}$. Dès lors, $3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{BG}$. Il s'ensuit que $3\overrightarrow{BK} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BG}$ i.e. $\frac{3}{2}\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BG}$ et, finalement, $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BG}$. Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{BK}$, $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires donc les points B, K, I et G sont coplanaires.

Preuve du corollaire 26 Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ où a et b sont deux réels quelconques. Notons B et C les points tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Alors, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires donc les points A, B et C définissent un unique plan P . Montrons que $\mathcal{E} = P$. Pour cela, on montre que $\mathcal{E} \subset P$ et $P \subset \mathcal{E}$.

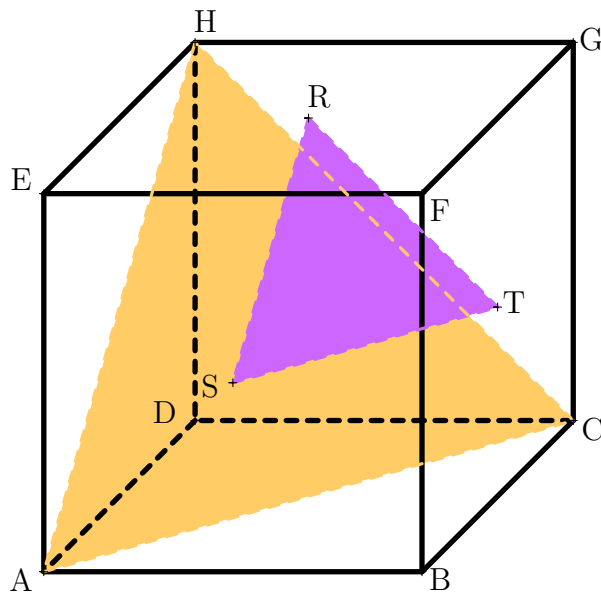
Soit $M \in \mathcal{E}$. Alors, il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ i.e. $\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ donc, d'après le théorème 24, M appartient à P . Ainsi, $\mathcal{E} \subset P$.

Réciproquement, supposons que $M \in P$. Comme $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan P , si on note (a, b) les coordonnées de M dans ce repère, on a, par définition, $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ donc $M \in \mathcal{E}$. Ainsi, $P \subset \mathcal{E}$.

On conclut donc que $\mathcal{E} = P$. ■

La **propriété 28** est admise.

Exemple 30



Une base de (RST) est $(\overrightarrow{RS}, \overrightarrow{RT})$ et une base de (ABH) est $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HC})$.

Or, $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$ donc $\overrightarrow{RS}$ est colinéaire à $\overrightarrow{HA}$.

De la même manière, $\overrightarrow{RT} = \overrightarrow{RF} + \overrightarrow{FT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{HC}$ donc $\overrightarrow{RT}$ est colinéaire à $\overrightarrow{HC}$.

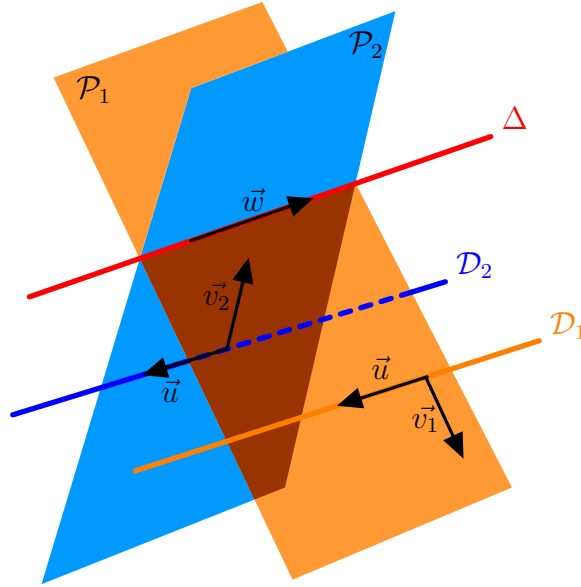
Ainsi, une base de (RST) est formée par deux vecteurs respectivement colinéaires à deux vecteurs d'une base de (AHC) donc, par théorème, $(RST) \parallel (AHC)$.

Application 31. — Démonstration du théorème du toit.

On considère deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants selon une droite Δ . On suppose que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites telles que $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{P}_1$, $\mathcal{D}_2 \subset \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_2$.

Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ . Comme $\mathcal{D}_2$ est parallèle à $\mathcal{D}_1$, $\vec{u}$ est également un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$.

On considère un vecteur $\vec{v}_1$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ soit une base de $\mathcal{P}_1$ et un vecteur $\vec{v}_2$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}_2)$ soit une base de $\mathcal{P}_2$.



1. Montrons que $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont non coplanaires. Supposons le contraire. Alors, comme $\vec{u}$ et $\vec{v}_1$ ne sont pas colinéaires, il existe des réels a et b tels que $\vec{v}_2 = a\vec{u} + b\vec{v}_1$. Soit $A \in \Delta$ et $M \in \mathcal{P}_2$. Alors, d'après le corollaire 26, il existe des réels x et y tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}_2$ et donc $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y(a\vec{u} + b\vec{v}_1) = (x + ya)\vec{u} + yb\vec{v}_1$. Or, $(A, \vec{u}, \vec{v}_1)$ est un repère de $\mathcal{P}_1$ donc, d'après le corollaire 26, $M \in \mathcal{P}_1$. Ainsi, le plan $\mathcal{P}_2$ est inclus dans le plan $\mathcal{P}_1$ ce qui est absurde car $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon la droite Δ . Ainsi, $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont non coplanaires.
2. Comme Δ est incluse dans $\mathcal{P}_1$, $\vec{w}$ est coplanaire avec $\vec{u}$ et $\vec{v}_1$ donc il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}_1$. De même, Δ est incluse dans $\mathcal{P}_2$, il existe des réels c et d tels que $\vec{w} = c\vec{u} + d\vec{v}_2$. Dès lors, $a\vec{u} + b\vec{v}_1 = c\vec{u} + d\vec{v}_2$ i.e. $(a - c)\vec{u} + b\vec{v}_1 - d\vec{v}_2 = \vec{0}$ donc, comme $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont non coplanaires, $a - c = 0$, $b = 0$ et $d = 0$ (cf. le point 2. de la remarque 23). Comme $b = 0$, on a $\vec{w} = a\vec{u}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires et ainsi Δ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$. ■