

III. — Lois exponentielles

Théorème et définition 14

Soit λ un réel strictement positif. Alors, la fonction f_λ définie sur $[0; +\infty[$ par $f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$. Si une variable aléatoire suit une loi de probabilité de densité f_λ , on dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

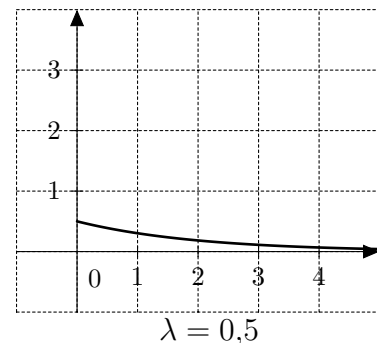
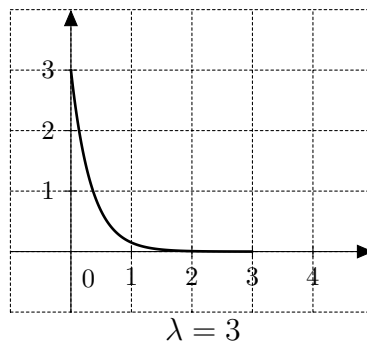
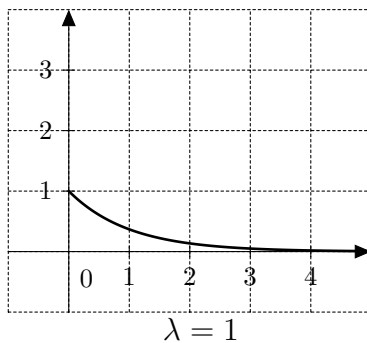
Démonstration. La fonction f_λ est continue et positive sur $[0; +\infty[$. Soit un réel $x \geq 0$. Alors,

$$\int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^x = -e^{-\lambda x} - (-e^0) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Comme $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$. On conclut que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1$.

Ainsi, f_λ est une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$. □

Remarque 15. — Le paramètre λ est égal à $f_\lambda(0)$. Ceci peut permettre de déterminer et/ou d'estimer λ graphiquement ou par le calcul lorsque ce paramètre est inconnu.



Exemple 16. — La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique est modélisée par la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$. On choisit un composant au hasard.

1. Quelle est la probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure à 1000 heures ?
2. Quelle est la probabilité que ce composant soit encore en état de marche au bout de 500 heures ?

Solution

1. La probabilité que ce composant ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est

$$P(X \leq 1000) = \int_0^{1000} 0,0006 e^{-0,0006t} dt = \left[-e^{-0,0006t} \right]_0^{1000} = -e^{-0,6} - (-1) = 1 - e^{-0,6} \approx 0,451.$$

2. la probabilité que ce composant soit encore en état de marche au bout de 500 heures est

$$\begin{aligned} P(X > 500) &= 1 - P(X \leq 500) = 1 - \left(\int_0^{500} 0,0006 e^{-0,0006t} dt \right) \\ &= 1 - \left[-e^{-0,0006t} \right]_0^{500} = 1 + e^{-0,3} - 1 \\ &= e^{-0,3} \approx 0,741. \end{aligned}$$

Théorème 17

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Alors, pour tous réels positifs a et h ,

$$\mathbf{P}_{(X \geq a)}(X \geq a + h) = \mathbf{P}(X \geq h).$$

Démonstration. Soit b un réel positif. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \geq b) &= 1 - \mathbf{P}(X \leq b) = 1 - \left(\int_0^b \lambda e^{-\lambda t} dt \right) \\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^b = 1 + e^{-\lambda b} - 1 \\ &= e^{-\lambda b}\end{aligned}$$

Soit maintenant des réels positifs a et h . Alors,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_{(X \geq a)}(X \geq a + h) &= \frac{\mathbf{P}((X \geq a + h) \cap (X \geq a))}{\mathbf{P}(X \geq a)} \\ &= \frac{\mathbf{P}(X \geq a + h)}{\mathbf{P}(X \geq a)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(a+h)}}{e^{-\lambda a}} = \frac{e^{-\lambda a} e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda a}} \\ &= e^{-\lambda h} \\ &= \mathbf{P}(X \geq h)\end{aligned}$$

Ainsi, on a bien $\mathbf{P}_{(X \geq a)}(X \geq a + h) = \mathbf{P}(X \geq h)$. □

Remarque 18. — Ce théorème justifie que la loi exponentielle soit aussi appelée *loi de durée de vie sans vieillissement* ou encore *loi sans mémoire*.

Exemple 19. — En reprenant les données de l'exemple 15, déterminer la probabilité que le composant fonctionne encore au bout de 2000 heures sachant qu'il a déjà fonctionné pendant 1500 heures.

Solution. Comme la loi exponentielle est sans mémoire,

$$\mathbf{P}_{(X \geq 1500)}(X \geq 2000) = \mathbf{P}_{(X \geq 1500)}(X \geq 1500 + 500) = \mathbf{P}(X \geq 500) = \mathbf{P}(X > 500) = e^{-0,3} \approx 0,741.$$

Définition 20

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle I de la forme $[a; +\infty[$. On dit que X admet une espérance si la fonction $F : x \mapsto \int_a^x t f(t) dt$ converge quand x tend vers $+\infty$ et la limite de F est alors appelée l'espérance de X , notée $E(X)$. Ainsi, en cas de convergence, on a $E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x t f(t) dt$.

Remarque 21. — Certaines variables aléatoires n'admettent pas d'espérance. C'est le cas par exemple d'une variable X dont la loi a pour densité $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $[1; +\infty[$ (exercice).

Théorème 22

Si X suit une loi exponentielle de paramètre λ alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Démonstration. Soit un réel $x \geq 0$. On doit calculer

$$\int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Pour cela, on intègre par parties en considérant $u : t \mapsto t$ et $v' : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t}$ de sorte que $u' : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto -e^{-\lambda t}$. On définit ainsi deux fonctions u et v dérivables à dérivées continues sur $[0; +\infty[$ donc

$$\begin{aligned} \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt &= \left[t \times (-e^{-\lambda t}) \right]_0^x - \int_0^x -e^{-\lambda t} dt \\ &= -xe^{-\lambda x} - 0 + \int_0^x e^{-\lambda t} dt \\ &= -xe^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x \\ &= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \frac{1}{\lambda} \left[-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right] \end{aligned}$$

Comme $\lambda > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x = -\infty$. Or, par théorèmes, $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = \lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\lambda x e^{-\lambda x} = 0$. Ainsi, par somme et produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t \times \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} (0 + 0 + 1) = \frac{1}{\lambda}.$$

Ainsi, X admet une espérance et $E(X) = \frac{1}{\lambda}$. □