

II. — Loi uniforme sur $[a; b]$

Définition 8

Soit $a < b$ deux réels. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a; b]$ si la loi de X est la loi de probabilité dont la densité est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$ sur $[a; b]$.

La densité d'une loi uniforme sur $[a; b]$ est la seule fonction constante sur $[a; b]$ qui puisse être une densité. En effet, si une densité f est constante égale à c sur $[a; b]$ alors

$$1 = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b c dt = c(b-a)$$

donc $c = \frac{1}{b-a}$.

Elle est l'équivalent pour les probabilités continues de l'équirépartition pour les lois sur des ensembles finis.

Propriété 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a; b]$ ($a < b$). Alors, pour tout intervalle $[c; d] \subset [a; b]$, $\mathbf{P}(X \in [c; d]) = \frac{d-c}{b-a}$.

Démonstration. Soit $[c; d]$ un intervalle inclus dans $[a; b]$. Alors,

$$P(X \in [c; d]) = \int_c^d \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \times (d-c) = \frac{d-c}{b-a}.$$

□

Convention. — On convient que « choisir un nombre au hasard dans un intervalle $[a; b]$ », c'est le choisir selon la loi uniforme sur $[a; b]$. En d'autres termes, si on considère l'expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre au hasard et si on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu alors X suit une loi uniforme sur $[a; b]$.

Exemple 10. — On choisit un réel au hasard dans $]0; 0,5[$. On note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu. Sachant que X est inférieur à 0,2, quelle est la probabilité que son deuxième chiffre après la virgule soit 1 ?

La variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $I =]0; 0,5[$.

Notons $J =]0; 0,2[$ et

$$K = [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[\cup [0,21; 0,22[\cup [0,31; 0,32[\cup [0,41; 0,42[.$$

Alors, la probabilité cherchée est

$$P_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{P(X \in J \cap K)}{P(X \in J)} = \frac{P(X \in [0,01; 0,02[\cup [0,11; 0,12[))}{P(X \in]0; 0,2[)}$$

Or, les intervalles $[0,01; 0,02[$ et $[0,11; 0,12[$ sont disjoints donc

$$P_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{P(X \in [0,01; 0,02[) + P(X \in [0,11; 0,12[))}{P(X \in]0; 0,2[)} = \frac{\frac{0,02-0,01}{0,5-0} + \frac{0,12-0,11}{0,5-0}}{\frac{0,2-0}{0,5-0}} = \frac{1}{10}.$$

Définition 11

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de probabilité de densité f définie sur un intervalle $I =]a; b[$. On appelle espérance de X le nombre réel $E(X) = \int_a^b tf(t) dt$.

Pour une loi sur un ensemble fini $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, l'espérance d'une variable aléatoire X est définie par

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i)$$

Pour une variable à densité continue, la somme est remplacée par une intégrale, l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ par l'intervalle $[a; b]$, les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$ par la variable t et la probabilité $P(X = x_i)$ par l'image de t par la densité f :

$$\sum_{i=1}^n x_i P(X = x_i) \quad \int_a^b tf(t) dt$$

Propriété 12

Si X suit une loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$) alors l'espérance de X est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

Démonstration. Supposons que X suit une loi uniforme sur $[a; b]$. Alors, par définition,

$$E(X) = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b t dt = \frac{1}{b-a} \left[\frac{t^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right]$$

donc

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{1}{b-a} \times \frac{(b-a)(b+a)}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

□

Exemple 13. — Le temps d'attente en minutes à un guichet est modélisé par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0; 30]$.

1. Un client se présente au guichet. Quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes ?
2. Sachant qu'au bout de 10 minutes, le client n'a toujours pas été servi, quelle est la probabilité qu'il attende au moins 10 minutes supplémentaires ?
3. Quel est le temps d'attente moyen à ce guichet ?

1. La probabilité d'attendre au moins 10 minutes est

$$P(X \geq 10) = P(X \in [10; 30]) = \frac{30 - 10}{30 - 0} = \frac{2}{3}.$$

2. Si un client a déjà attendu 10 minutes, la probabilité qu'il attende 10 minutes supplémentaires est

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = P_{(X \in [10; 30])}(X \in [20; 30]) = \frac{P(X \in [20; 30] \cap [10; 30])}{P(X \in [10; 30])}$$

Or, $[20; 30] \cap [10; 30] = [20; 30]$ donc

$$P_{(X \geq 10)}(X \geq 10 + 10) = \frac{P(X \in [20; 30])}{P(X \in [10; 30])} = \frac{\frac{30-20}{30-0}}{\frac{30-10}{30-0}} = \frac{1}{2}.$$

3. Le temps d'attente moyen est $E(X) = \frac{0+30}{2} = 15$ minutes.