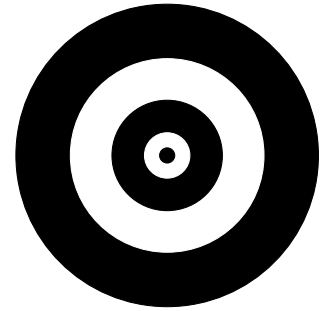


I. — Un exemple pour commencer

Un joueur lance une fléchette sur une cible de rayon 20 cm partagée en 5 secteurs délimités par les cercles de rayons 1 cm, 3 cm, 7 cm et 13 cm. En supposant que la fléchette atteint un point au hasard sur la cible, quelle est la probabilité qu'elle atteigne chacun des 5 secteurs ?



Une modélisation naturelle est de considérer que la probabilité d'atteindre un secteur de la cible est proportionnelle à l'aire de ce secteur. Notons S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5 les 5 secteurs de la cible partant de l'intérieur vers l'extérieur (ainsi S_1 est un disque de rayon 1 cm et S_5 est la plus grande des couronne) et C la cible entière. Les aires sont données par le tableau suivant :

secteur	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	C
aire (en cm^2)	$\pi \times 1^2$	$\pi \times 3^2 - \pi \times 1^2$	$\pi \times 7^2 - \pi \times 3^2$	$\pi \times 13^2 - \pi \times 7^2$	$\pi \times 20^2 - \pi \times 13^2$	$\pi \times 20^2$

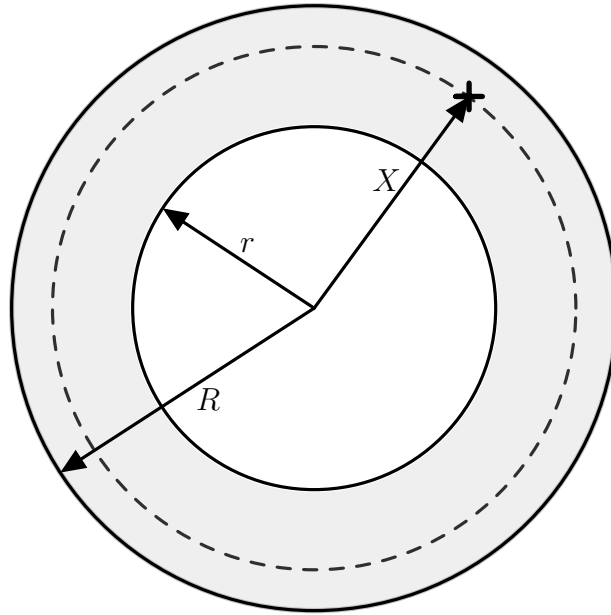
Ainsi, si on prend comme modèle la probabilité P telle que la probabilité d'atteindre un secteur est égale au rapport de l'aire de ce secteur avec l'aire totale de la cible, on obtient les probabilités suivantes :

secteur	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	C
probabilité	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{50}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{231}{400}$	1

De manière générale, si on considère une couronne S comprise entre deux cercles de rayon r et R (avec $0 \leq r < R \leq 20$) alors la probabilité que la fléchette atteigne cette couronne est

$$P(S) = \frac{\pi \times R^2 - \pi \times r^2}{\pi \times 20^2}$$

On peut remarquer que le fait que la fléchette atteigne cette couronne ne dépend que de la distance entre le centre de la cible et le point d'impact. Il est donc naturel d'introduire cette distance qu'on notera ici X . On définit ainsi une variable aléatoire (les valeurs de X varient aléatoirement en fonction du tir) dont les valeurs peuvent être n'importe quel nombre de l'intervalle $[0; 20]$.



Avec cette notation, on a donc

$$P(S) = P(r \leq X \leq R) = \frac{\pi \times R^2 - \pi \times r^2}{\pi \times 20^2}$$

On peut remarquer que, si on considère la fonction $F : t \mapsto \pi \times t^2$ alors

$$P(r \leq X \leq R) = \frac{F(R) - F(r)}{\pi \times 20^2}.$$

Ainsi, si on considère la fonction f dérivée de F sur $\mathbb{R}$, à savoir $f : t \mapsto 2\pi \times t$ alors

$$P(r \leq X \leq R) = \int_r^R \frac{f(t)}{\pi \times 20^2} dt.$$

Comment interpréter cette égalité ?

On reconnaît que $f(t) = 2\pi t$ est la circonférence d'un cercle de rayon t . Or, la fléchette atteint la couronne S si et seulement si elle atteint un cercle de rayon t compris entre r et R . Ainsi, le fait d'intégrer $\frac{f(t)}{\pi \times 20^2}$ entre r et R peut être vu comme une façon « d'ajouter » tous ces cercles pour former une couronne.

Pourquoi une intégrale et pas une somme classique ?

Il y a deux problèmes pour faire une somme habituelle. Tout d'abord, il y a une infinité de cercles et on ne sait additionner qu'un nombre fini de termes. Ensuite, chaque cercle a une aire nulle donc si on pouvait additionner toutes ces aires, on trouverait... 0 ?

Quelle est la probabilité d'atteindre le cercle de rayon r ?

Avec notre modèle, cette probabilité est

$$P(X = r) = \int_r^r \frac{f(t)}{\pi \times 20^2} dt = 0$$

Les événements du type $(X = r)$ n'ont donc pas beaucoup d'intérêt car ils ont tous une probabilité nulle. On ne s'intéressera donc qu'à des événements de la forme $(r \leq X \leq R)$.

Ici, la variable aléatoire ne prend pas un nombre fini de valeurs comme celles étudiées jusqu'à maintenant mais un nombre infini appartenant à un intervalle. On dit que X est une variable aléatoire à densité continue et que la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{\pi \times 20^2}$ est sa densité de probabilité.

II. — Généralités

Notation. — Si a et b sont deux réels tels que $a < b$, on convient de désigner par $]a; b[$ n'importe lequel des quatre intervalles $[a; b]$, $[a; b[$, $]a; b]$ et $]a; b[$ et de désigner par $]a; +\infty[$ n'importe lequel des deux intervalles $[a; +\infty[$ et $]a; +\infty[$.

Définition 1

Soit I un intervalle de la forme $]a; b[$ ou $]a; +\infty[$ et f une fonction **continue** et **positive** sur I . On dit que f est une densité de probabilité sur I si

$$\int_a^b f(t) dt = 1 \text{ dans le cas où } I =]a; b[$$

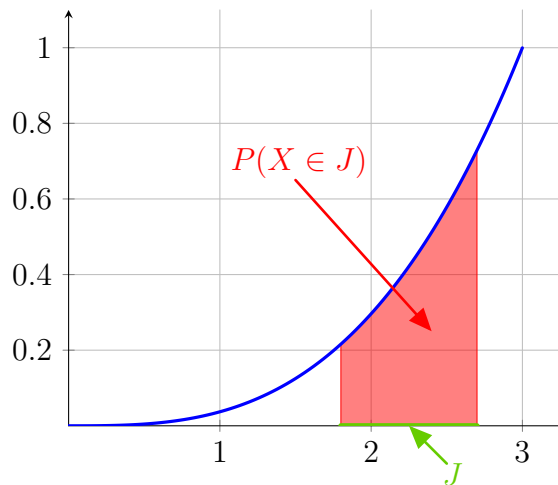
ou

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = 1 \text{ dans le cas où } I =]a; +\infty[.$$

Remarque 2. — On peut également définir une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ tout entier : il s'agit d'une fonction continue et positive sur $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{a \rightarrow -\infty} \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt = 1$.

Définition 3

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I . On s'intéresse à une expérience aléatoire sur un univers Ω modélisée par une probabilité $\mathbf{P}$ sur Ω . On considère une variable aléatoire X définie sur Ω et à valeurs dans I . On dit que X suit la loi de probabilité de densité f si, pour tout intervalle J inclus dans I , $\mathbf{P}(X \in J)$ est égale à l'aire de la partie du plan définie comme l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x \in J$ et $0 \leq y \leq f(x)$.



Remarque 4. — La notation $(X \in J)$ est une notation abrégée (et abusive) pour désigner l'ensemble des ω de Ω tels que $X(\omega) \in J$.

Dans le cas où $J = [c; d]$ (resp. $J =]c; d]$, $J = [c; d[$, $J =]c; d[$), l'événement $(X \in J)$ se note aussi $(c \leq X \leq d)$ (resp. $(c < X \leq d)$, $(c \leq X < d)$, $(c < X < d)$).

Dans le cas où $J = [c; +\infty[$ (resp. $J =]c; +\infty[$), l'événement $(X \in J)$ se note aussi $(X \geq c)$ (resp. $(X > c)$).

Dans la suite de ce paragraphe, on se place dans les hypothèses de la définition 1.

Définition 5

1. Pour tout intervalle $J =]c; d[$ inclus dans I , $\mathbf{P}(X \in J) = \int_c^d f(t) dt$. En particulier, cette probabilité est la même que les crochets soient ouverts ou fermés (ou, si on utilise la notation avec les inégalités, la probabilité est la même que les inégalités soient larges ou strictes).
2. Pour tout $c \in I$, $\mathbf{P}(X = c) = 0$.
3. Pour tous intervalles J et K inclus dans I ,

$$\mathbf{P}(X \in J \cup K) = \mathbf{P}(X \in J) + \mathbf{P}(X \in K) - \mathbf{P}(X \in J \cap K).$$

En particulier, si J et K sont disjoints, alors $\mathbf{P}(X \in J \cup K) = \mathbf{P}(X \in J) + \mathbf{P}(X \in K)$.

4. Si J et K sont complémentaires dans I alors $\mathbf{P}(X \in J) = 1 - \mathbf{P}(X \in K)$.
5. Si I est la forme $]a; +\infty[$ et si J est un intervalle de la forme $]c; +\infty[$ inclus dans I alors

$$\mathbf{P}(X \in J) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_c^x f(t) dt = 1 - \int_a^c f(t) dt.$$

Exemple 6.

1. Montrer que la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = 4t^3$ est une densité de probabilité sur $[0; 1]$. On suppose que X suit une loi de probabilité de densité f . Calculer $\mathbf{P}(X \in [0,25; 0,75])$.

Solution. La fonction f est continue et positive sur $[0; 1]$. De plus,

$$\int_0^1 f(t) dt = [t^4]_0^1 = 1^4 - 0^4 = 1$$

donc f est une densité de probabilité sur $[0; 1]$.

On a alors

$$\mathbf{P}(X \in [0,25; 0,75]) = \int_{0,25}^{0,75} 4t^3 dt = [t^4]_{0,25}^{0,75} = 0,75^4 - 0,25^4 = 0,3125.$$

2. Déterminer le réel λ tel que la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(t) = \frac{\lambda}{t^3}$ soit une densité de probabilité. On suppose que X suit une loi de probabilité de densité f (pour cette valeur de λ). Calculer alors $\mathbf{P}(X \in [1; 5] \cup [10; +\infty[)$.

Solution. La fonction f est continue sur $[1; +\infty[$ et elle est positive si et seulement si $\lambda \geq 0$. De plus, pour tout réel $x \geq 1$,

$$\int_1^x f(t) dt = \left[-\frac{\lambda}{2t^2} \right]_1^x = -\frac{\lambda}{2x^2} + \frac{\lambda}{2}.$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x f(t) dt = \frac{\lambda}{2}$ donc f est une densité probabilité si et seulement si $\lambda = 2$.

Pour calculer $\mathbf{P}(X \in [1; 5] \cup [10; +\infty[)$, on peut s'y prendre de deux façons.

Soit on remarque que $[1; 5[$ et $[10; +\infty[$ sont disjoints donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X \in [1; 5[\cup [10; +\infty[) &= \mathbf{P}(X \in [1; 5[) + \mathbf{P}([10; +\infty[) \\ &= \int_1^5 \frac{2}{t^3} dt + 1 - \int_1^{10} \frac{2}{t^3} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^5 + 1 - \left[-\frac{1}{t^2}\right]_1^{10} \\ &= -\frac{1}{25} + 1 + 1 + \frac{1}{100} - 1\end{aligned}$$

donc $\mathbf{P}(X \in [1; 5[\cup [10; +\infty[) = \frac{97}{100}$.

On peut également remarquer que $[5; 10[$ est le complémentaire de $[1; 5[\cup [10; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$ donc

$$\mathbf{P}(X \in [1; 5[\cup [10; +\infty[) = 1 - \mathbf{P}(X \in [5; 10[) = 1 - \int_5^{10} \frac{2}{t^3} dt = 1 - \left[-\frac{1}{t^2}\right]_5^{10} = 1 + \frac{1}{100} - \frac{1}{25}$$

et on retrouve que $\mathbf{P}(X \in [1; 5[\cup [10; +\infty[) = \frac{97}{100}$.

Définition 7

Soit $J \subset I$ un intervalle tel que $\mathbf{P}(X \in J) \neq 0$ et K un intervalle inclus dans I . On définit la probabilité conditionnelle de $(X \in K)$ sachant $(X \in J)$ par $\mathbf{P}_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{\mathbf{P}(X \in K \cap J)}{\mathbf{P}(X \in J)}$.

En particulier, si $K \subset J$ alors $\mathbf{P}_{(X \in J)}(X \in K) = \frac{\mathbf{P}(X \in K)}{\mathbf{P}(X \in J)}$ et si K et J sont disjoints (c'est-à-dire $K \cap J = \emptyset$) alors $\mathbf{P}_{(X \in J)}(X \in K) = 0$.