

Propriété 28. — Relation de Chasles

Soit f une fonction continue sur un intervalle quelconque I . Soit a , b et c trois réels quelconques appartenant à I . Alors,

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

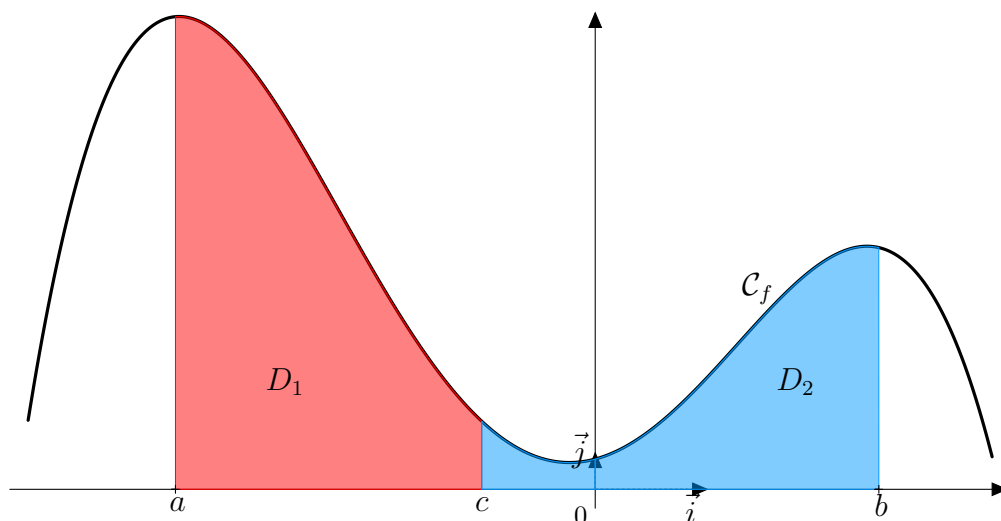
Démonstration. Soit F une primitive de f sur I . Alors,

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

□

Interprétation graphique dans le cas où $a \leq c \leq b$ et f positive

Dans le cas où f est positive et $a \leq c \leq b$, la relation de Chasles n'est rien d'autre que l'additivité des aires :



$$\int_a^b f(t) dt = \text{aire}(D_1) + \text{aire}(D_2) = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

Corollaire 29

Soit f une fonction continue sur un intervalle quelconque I . Soit a et b deux réels quelconques appartenant à I . Alors,

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Démonstration. Par la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^a f(t) dt = \int_a^a f(t) dt = 0$$

donc

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

□

Corollaire 30

Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $[-a; a]$.

1. Si f est une fonction paire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
2. Si f est une fonction impaire alors $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$.

Démonstration. D'après la relation de Chasles,

$$\int_{-a}^a f(t) dt = \int_{-a}^0 f(t) dt + \int_0^a f(t) dt \quad [*]$$

Notons F une primitive de f sur $[-a; a]$. Alors,

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = F(0) - F(-a).$$

Or, la fonction $G : t \mapsto F(-t)$ est dérivable sur $[-a; a]$ comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $t \in [-a; a]$, $G'(t) = -F'(-t) = -f(-t)$ donc

$$\int_{-a}^0 f(t) dt = G(0) - G(a) = \int_a^0 -f(-t) dt = - \int_a^0 f(-t) dt = \int_0^a f(-t) dt.$$

1. Si f est paire alors, pour tout $t \in [-a; a]$, $f(-t) = f(t)$ donc $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$ et donc, d'après $[*]$, $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$.
2. Si f est impaire alors, pour tout $t \in [-a; a]$, $f(-t) = -f(t)$ donc $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a -f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt$ et donc, d'après $[*]$, $\int_{-a}^a f(t) dt = - \int_0^a f(t) dt + \int_0^a f(t) dt = 0$.

□

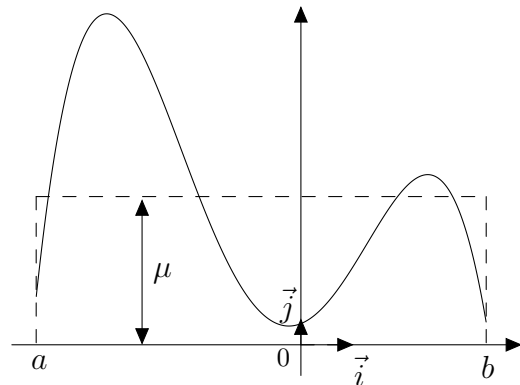
Remarque. — Comme les fonctions $\sin$ et $u \mapsto u^5 - 2u^3 + 2u$ sont impaires, on retrouve ainsi les résultats des calculs de I_1 et I_3 dans l'exemple 25 : $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(t) dt = 0$ et $\int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u du = 0$.

Définition 31

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Alors, le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a; b]$.

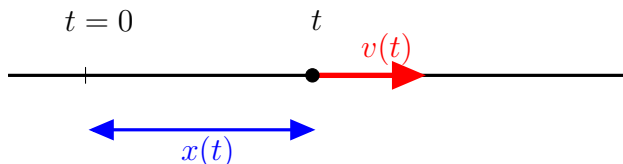
Interprétation graphique dans le cas d'une fonction positive. — Par définition, le réel μ vérifie l'égalité

$\mu \times (b-a) = \int_a^b f(x) dx$. Ceci revient à dire que μ est la hauteur du rectangle de base $b-a$ qui a la même aire que l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ entre a et b . Autrement dit, μ est la constante telle que $\int_a^b \mu dx = \int_a^b f(x) dx$.



Exemple 32. Vitesse moyenne

On considère un mobile qui se déplace sur une trajectoire rectiligne à partir du temps $t = 0$. On note $x(t)$ l'abscisse du mobile à l'instant t et $v(t)$ la vitesse instantanée du mobile à l'instant t .



On a donc, pour tout $t \geq 0$, $v'(t) = x(t)$ (autrement dit $v = \frac{dx}{dt}$).

Soit t_1 et t_2 deux temps tels que $t_1 < t_2$. Entre ces deux temps, la distance parcourue par le mobile est $x(t_2) - x(t_1)$ donc sa vitesse moyenne est $v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Par ailleurs, la valeur moyenne de la vitesse entre t_1 et t_2 est

$$\mu = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} [x(t)]_{t_1}^{t_2} = \frac{1}{t_2 - t_1} [x(t_2) - x(t_1)] = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = v_m.$$

Ainsi, la valeur moyenne de la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne.

Propriété 33. — Inégalités de la moyenne

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. Si m est un minorant de f sur $[a; b]$ et si M est un majorant de f sur $[a; b]$ (autrement dit, si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a; b]$) alors

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

En d'autres termes, la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est comprise entre m et M .



Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leq b$.

Démonstration. Pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ donc par croissance de l'intégrale, on a

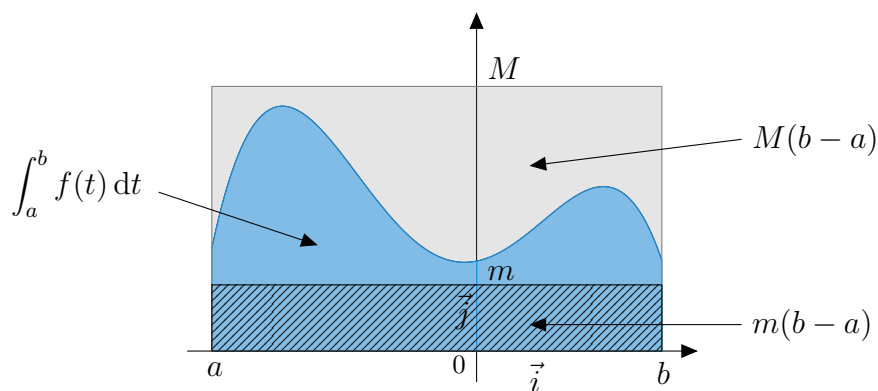
$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx$$

et donc

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a).$$

□

Remarque. Si f est une fonction positive sur $[a; b]$, les inégalités de la moyenne s'interprète graphiquement en disant que l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire du rectangle de hauteur m et l'aire du rectangle de hauteur M .



Si $a < b$ alors, en divisant par $b - a > 0$ les inégalités de la moyenne, on obtient

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$$

i.e. si on note μ la valeur moyenne de f sur $[a; b]$,

$$m \leq \mu \leq M.$$

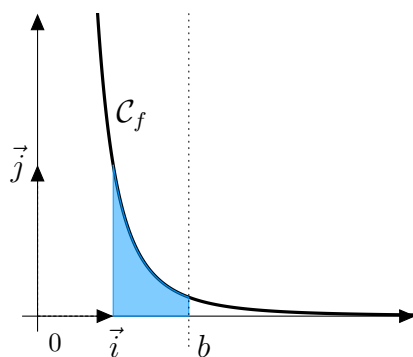
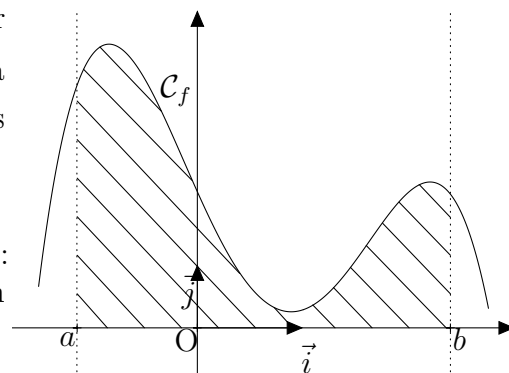
Ainsi, la valeur moyenne de f est comprise en m et M .

Calculs d'aire

Par définition, si une fonction f est continue et positive sur un segment $[a; b]$, $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Exemple 34. Le plan est muni d'un repère orthogonal (unités : 1 cm en abscisse et 2 cm en ordonnée). On considère la fonction f définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^3}$.

Soit $b > 1$. Déterminer l'aire $A(b)$, en cm^2 , de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = 1$ et $x = b$. Que peut-on dire de $A(b)$ lorsque b tend vers $+\infty$? Interpréter.

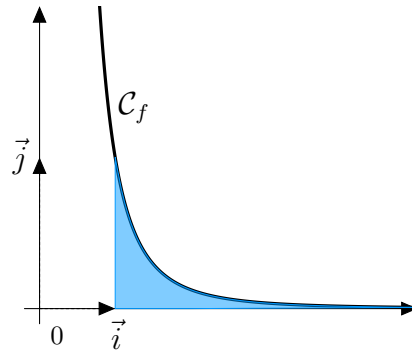


Comme la fonction f est continue et positive sur $[1; b]$, l'aire sous la courbe, exprimée en u.a., est

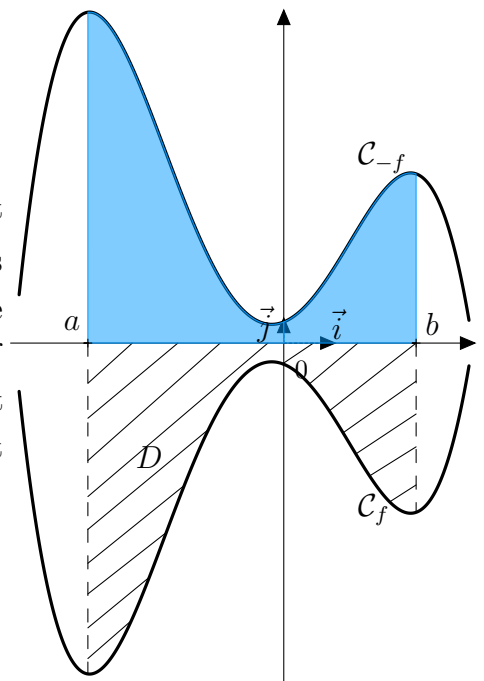
$$\int_1^b \frac{1}{x^3} dx = \left[-\frac{1}{2x^2} \right]_1^b = -\frac{1}{2b^2} - \left(-\frac{1}{2 \times 1^2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}$$

Ici, l'unité en abscisse est 1 cm et l'unité en ordonnée est 2 cm. Ainsi, 1 u.a. est $(1\text{cm}) \times (2\text{cm}) = 2\text{cm}^2$. Ainsi, l'aire $A(b)$, exprimée en cm^2 est $A(b) = 2 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b} \right) = 1 - \frac{1}{b}$.

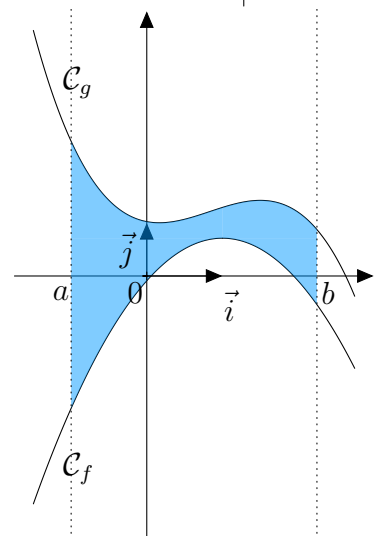
Dès lors, $\lim_{b \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{b} = 1$. Cela signifie que la partie du plan délimitée par la droite d'équation $x = 1$, l'axe des abscisses est la courbe de f a une aire de 1 cm^2 .



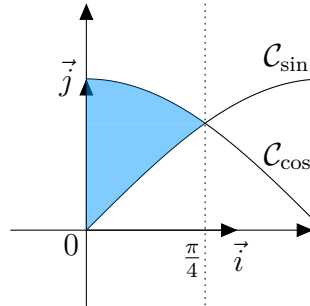
Si f est une fonction continue et négative sur un segment $[a; b]$ alors $\int_a^b f(t) dt$ est égale à l'opposé de l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ car $\int_a^b f(t) dt = - \int_a^b [-f(t)] dt$ et les courbes de f et $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc délimitent des surfaces de même aire.



Enfin, si f et g sont deux fonctions continues et de signe quelconque sur $[a; b]$ telles que, pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ (i.e. la courbe de f est entièrement située en dessous de celle de g sur $[a; b]$) alors l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe de f , celle de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est, en unités d'aire, $\int_a^b [g(t) - f(t)] dt$.



Exemple 35. Le plan est muni d'un repère orthonormal d'unité 2 cm. On considère les courbes des fonctions sin et cos. Déterminer l'aire S en cm^2 de la partie du plan située entre ces deux courbes sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.



Pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sin(x)$ donc l'aire, en u.a., la partie du plan étudiée est

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) - \sin(x) \, dx &= [\sin(x) + \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - (\cos(0) + \sin(0)) \\ &= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \\ &= \sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

L'unité graphique est ici 2 cm sur chaque axe donc l'u.a. est $(2\text{cm})^2 = 4\text{cm}^2$.

Ainsi, $S = 4(\sqrt{2} - 1) \text{ cm}^2$.