

Théorème et définition 20

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux réels appartenant à I . Alors, quelle que soit la primitive F de f , la différence $F(b) - F(a)$ prend la même valeur. Par définition, cette valeur est appelée *l'intégrale de a et b de la fonction f* et on la note $\int_a^b f(x) \, dx$.

Théorème et définition 20

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux réels appartenant à I . Alors, quelle que soit la primitive F de f , la différence $F(b) - F(a)$ prend la même valeur. Par définition, cette valeur est appelée *l'intégrale de a et b de la fonction f* et on la note $\int_a^b f(x) dx$.

Démonstration.

Soit F et G deux primitives de f sur I . Alors, il existe une constante réelle c telle que $G = F + c$ donc

$$G(b) - G(a) = (F(b) - c) - (F(a) - c) = F(b) - c - F(a) + c = F(b) - F(a)$$

Ainsi, la différence $F(b) - F(a)$ est indépendante de la primitive choisie. □

Notation 21

On note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Notation 21

On note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Remarque 22

1. Par définition, on a donc $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f . En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I et si $a \in I$ alors, pour tout $x \in I$,
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt.$$

Notation 21

On note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Remarque 22

1. Par définition, on a donc $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f . En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I et si $a \in I$ alors, pour tout $x \in I$,
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt.$$
2. Cette définition ne suppose pas que $a < b$. En particulier,
$$\int_a^a f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0.$$

Notation 21

On note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Remarque 22

1. Par définition, on a donc $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f . En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I et si $a \in I$ alors, pour tout $x \in I$,
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \, dt.$$
2. Cette définition ne suppose pas que $a < b$. En particulier,
$$\int_a^a f(x) \, dx = F(a) - F(a) = 0.$$
3. Dans le cas où f est continue et positive et $a < b$, les « deux » définitions 1 et 15 coïncident.

Exemple 23

Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt$$

$$I_2 = \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} \, dx$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u \, du$$

$$I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}.$$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt \\ &= [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt \\ &= [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt \\
 &= [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) \\
 &= -(-1) - (-(-1))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin t \, dt \\
 &= [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} \\
 &= -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) \\
 &= -(-1) - (-(-1)) \\
 &= 1 - 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} \, dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} \color{red}{2} \times \color{red}{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}_{\color{blue}{u' e^u}} dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} \, dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} \, dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}_{u' e^u} \, dx \\
 &= \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^{\ln(3)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\ln 3} 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}_{u' e^u} dx \\
 &= \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^{\ln(3)} \\
 &= 2e^{\frac{\ln(3)}{2}} - 2e^{\frac{0}{2}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \textcolor{red}{2} \times \textcolor{red}{\frac{1}{2}} e^{\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}_{\textcolor{blue}{u' e^u}} dx \\
&= \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^{\ln(3)} \\
&= 2e^{\frac{\ln(3)}{2}} - 2e^{\frac{0}{2}} \\
&= 2e^{\ln(\sqrt{3})} - 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} 2 \times \underbrace{\frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}}}_{u' e^u} dx \\
&= \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^{\ln(3)} \\
&= 2e^{\frac{\ln(3)}{2}} - 2e^{\frac{0}{2}} \\
&= 2e^{\ln(\sqrt{3})} - 2 \\
&= 2\sqrt{3} - 2
\end{aligned}$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u \, du$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u \, du \\ &= \left[\frac{u^6}{6} - \frac{1}{2}u^4 + u^2 \right]_{-1}^1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u \, du \\
 &= \left[\frac{u^6}{6} - \frac{1}{2}u^4 + u^2 \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u \, du \\
 &= \left[\frac{u^6}{6} - \frac{1}{2}u^4 + u^2 \right]_{-1}^1 \\
 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx \\
 &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u' u} \ln(x) \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx \\
 &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u' / u} \ln(x) \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx \\
 &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{\textcolor{blue}{u' u}} \ln(x) \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e \\
 &= \frac{1}{2} (\ln(e))^2 - \frac{1}{2} (\ln(1))^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\
 &= \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) \, dx \\
 &= \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x} \ln(x)}_{\textcolor{blue}{u'/u}} \, dx \\
 &= \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e \\
 &= \frac{1}{2} (\ln(e))^2 - \frac{1}{2} (\ln(1))^2 \\
 &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \\
 &= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \\
 &= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt \\
 &= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'}{u}} dt
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_5 &= \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \\
 &= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt \\
 &= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'}{u}} dt \\
 &= [\ln |\ln(t)|]_e^{e^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \\
&= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt \\
&= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'}{u}} dt \\
&= [\ln |\ln(t)|]_e^{e^2} \\
&= [\ln(\ln(t))]_e^{e^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \\
&= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt \\
&= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'}{u}} dt \\
&= [\ln |\ln(t)|]_e^{e^2} \\
&= [\ln(\ln(t))]_e^{e^2} \\
&= \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} \\
&= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt \\
&= \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'}{u}} dt \\
&= [\ln |\ln(t)|]_e^{e^2} \\
&= [\ln(\ln(t))]_e^{e^2} \\
&= \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) \\
&= \ln(2)
\end{aligned}$$

Propriété 24. — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel quelconque. Alors,

1. $\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$
2. $\int_a^b k \times f(x) \, dx = k \times \int_a^b f(x) \, dx.$

Propriété 24. — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a ; b]$ et k un réel quelconque. Alors,

$$1. \int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$2. \int_a^b k \times f(x) \, dx = k \times \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dans l'égalité 1, il est indispensable que les bornes soient les mêmes pour les 3 intégrales.



Propriété 24. — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel quelconque. Alors,

$$1. \int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$2. \int_a^b k \times f(x) \, dx = k \times \int_a^b f(x) \, dx.$$

Dans l'égalité 1, il est indispensable que les bornes soient les mêmes pour les 3 intégrales.



Dans l'égalité 2, il faut bien s'assurer que k est une constante i.e qu'elle ne dépend pas de x .

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = [F(x) + G(x)]_a^b$$

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a))\end{aligned}$$

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a)\end{aligned}$$

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.\end{aligned}$$

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.\end{aligned}$$

2. $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur $[a; b]$ donc

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.\end{aligned}$$

2. $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur $[a; b]$ donc

$$\int_a^b k \times f(x) \, dx = [k \times F(x)]_a^b = k \times F(b) - k \times F(a)$$

Démonstration.

Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b \\ &= F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.\end{aligned}$$

2. $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned}\int_a^b k \times f(x) \, dx &= [k \times F(x)]_a^b = k \times F(b) - k \times F(a) \\ &= k \times (F(b) - F(a)) = k \times \int_a^b f(x) \, dx.\end{aligned}$$

Exemple 25

Calculer

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt.$$

Exemple 25

Calculer

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du$$

Exemple 25

Calculer

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \\ &= \int_0^1 3 \, du - 4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du \end{aligned}$$

Exemple 25

Calculer

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \\ &= \int_0^1 3 \, du - 4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du \end{aligned}$$

et donc, grâce à l'exemple 4 et à la remarque 5,

Exemple 25

Calculer

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \\ &= \int_0^1 3 \, du - 4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du \end{aligned}$$

et donc, grâce à l'exemple 4 et à la remarque 5,

$$I = 3 \times (1 - 0) - 4 \times \frac{\pi}{4}$$

Exemple 25

Calculer

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \text{ et } J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt.$$

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du \\ &= \int_0^1 3 \, du - 4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du \end{aligned}$$

et donc, grâce à l'exemple 4 et à la remarque 5,

$$\begin{aligned} I &= 3 \times (1 - 0) - 4 \times \frac{\pi}{4} \\ &= 3 - \pi \end{aligned}$$

De même,

$$J = \int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt$$

De même,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi \cos^2 t + \sin^2 t \, dt \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi \cos^2 t + \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi 1 \, dt \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\pi} \cos^2 t \, dt + \int_0^{\pi} \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 t + \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^{\pi} 1 \, dt \\ &= 1 \times (\pi - 0) \end{aligned}$$

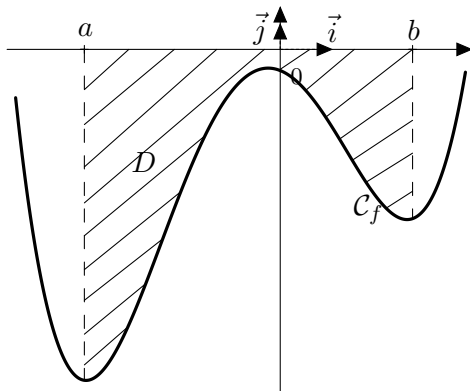
De même,

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi \cos^2 t + \sin^2 t \, dt \\ &= \int_0^\pi 1 \, dt \\ &= 1 \times (\pi - 0) \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction négative

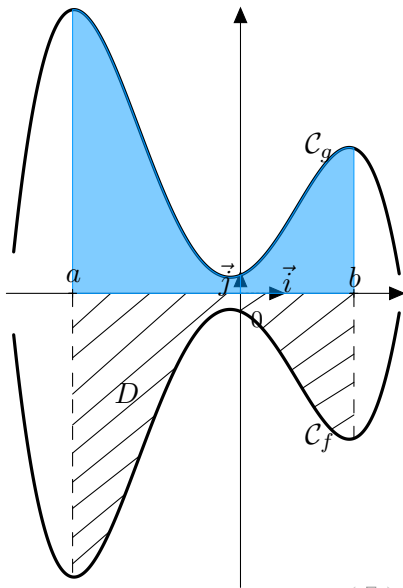
Soit f une fonction **continue et négative** sur $[a; b]$. Alors, l'intégrale de a à b de f s'interprète graphiquement comme l'opposé de l'aire sur la courbe i.e. l'opposé de la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Dans ce cas, c'est donc un nombre réel négatif sans unité.



En effet, si on note g la fonction définie sur $[a ; b]$ par $g(x) = -f(x)$ alors la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.

En effet, si on note g la fonction définie sur $[a ; b]$ par $g(x) = -f(x)$ alors la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.



Par symétrie, l'aire sur la courbe de f est égale à l'aire sous la courbe de g .

Par symétrie, l'aire sur la courbe de f est égale à l'aire sous la courbe de g . Or, comme f est une fonction négative et continue sur $[a ; b]$, g est positive et continue sur $[a ; b]$.

Par symétrie, l'aire sur la courbe de f est égale à l'aire sous la courbe de g . Or, comme f est une fonction négative et continue sur $[a; b]$, g est positive et continue sur $[a; b]$. On a donc

$$D = \int_a^b g(t) \, dt = \int_a^b -f(t) \, dt = - \int_a^b f(t) \, dt.$$

Par symétrie, l'aire sur la courbe de f est égale à l'aire sous la courbe de g . Or, comme f est une fonction négative et continue sur $[a; b]$, g est positive et continue sur $[a; b]$. On a donc

$$D = \int_a^b g(t) \, dt = \int_a^b -f(t) \, dt = - \int_a^b f(t) \, dt.$$

Ainsi, l'intégrale de f entre a et b est bien égale à l'opposée de l'aire de D .

Propriété 26. — Positivité et croissance de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tel que $a \leq b$. Alors,

1. POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE : si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
2. CROISSANCE DE L'INTÉGRALE : si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

Propriété 26. — Positivité et croissance de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tel que $a \leq b$. Alors,

1. POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE : si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
2. CROISSANCE DE L'INTÉGRALE : si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.



Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leq b$.

Démonstration.

1. 1^{ère} démonstration. Comme f est continue et positive, $\int_a^b f(x) \, dx$ est une aire donc c'est un nombre positif.

Démonstration.

1. 1^{ère} démonstration. Comme f est continue et positive,

$\int_a^b f(x) \, dx$ est une aire donc c'est un nombre positif.

2^{ème} démonstration. Soit F est une primitive de f sur I . Alors,

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration.

1. 1^{ère} démonstration. Comme f est continue et positive,

$\int_a^b f(x) \, dx$ est une aire donc c'est un nombre positif.

2^{ème} démonstration. Soit F est une primitive de f sur I . Alors,

$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. Or, par définition, $F' = f$ est positive donc F est croissante sur I .

Démonstration.

1. 1^{ère} démonstration. Comme f est continue et positive,

$\int_a^b f(x) \, dx$ est une aire donc c'est un nombre positif.

2^{ème} démonstration. Soit F est une primitive de f sur I . Alors,

$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$. Or, par définition, $F' = f$ est positive donc F est croissante sur I . Ainsi, comme $a \leq b$, $F(a) \leq F(b)$ et donc $F(b) - F(a) \geq 0$.

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I .

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I .
Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I .

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I .
Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I . De plus, comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$,
 $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$.

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I . Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I . De plus, comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Ainsi, $\int_a^b h(x) \, dx \geq 0$.

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I . Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I . De plus, comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Ainsi, $\int_a^b h(x) \, dx \geq 0$. Or, par linéarité,

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I . Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I . De plus, comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Ainsi, $\int_a^b h(x) \, dx \geq 0$. Or, par linéarité,

$$\int_a^b h(x) \, dx = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$$

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I . Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I . De plus, comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Ainsi, $\int_a^b h(x) \, dx \geq 0$. Or, par linéarité,

$$\int_a^b h(x) \, dx = \int_a^b f(x) - g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx$$

donc $\int_a^b f(x) \, dx - \int_a^b g(x) \, dx \geq 0$ et ainsi

$$\int_a^b f(x) \, dx \geq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Exemple 27

1. Comparer $I_1 = \int_0^1 e^t dt$ et $I_2 = \int_0^1 e^{t^2} dt$.
2. Montrer que la suite (I_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$$
 est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?

1. Comme on intègre deux fonctions sur le même intervalle, il suffit de comparer les fonctions pour comparer les intégrales.

1. Comme on intègre deux fonctions sur le même intervalle, il suffit de comparer les fonctions pour comparer les intégrales. Or, pour tout $t \in [0; 1]$, $t^2 \leq t$ donc, par croissance de la fonction exp, $e^{t^2} \leq e^t$.

1. Comme on intègre deux fonctions sur le même intervalle, il suffit de comparer les fonctions pour comparer les intégrales. Or, pour tout $t \in [0; 1]$, $t^2 \leq t$ donc, par croissance de la fonction exp, $e^{t^2} \leq e^t$. Dès lors, par croissance de l'intégrale,
- $$\int_0^1 e^{t^2} dt \leq \int_0^1 e^t dt \text{ i.e. } I_2 \leq I_1.$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right)$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1 dt$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1 dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \end{aligned}$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1 dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1 dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) \end{aligned}$$

2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1 dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) \\ &= -0 + 1 = 1. \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \, dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication.

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t ,
 $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t , $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t ,
 $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t , $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t , $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(0) \right] \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t ,
 $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(0) \right] \\ &= \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) \, dt$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \sin(t) \cos^2(t) dt$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \sin(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\sin(t)) \cos^2(t)}_{u'u^2} dt \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \sin(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\sin(t)) \cos^2(t)}_{u'u^2} dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \sin(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\sin(t)) \cos^2(t)}_{u'u^2} dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) + \frac{1}{3} \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^3(0) \end{aligned}$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit

$$\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)] :$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \sin(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\sin(t)) \cos^2(t)}_{u'u^2} dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cos^3(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) + \frac{1}{3} \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^3(0) \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation :

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation : pour tout réel t ,

$$\sin^3(t) = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t).$$

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation : pour tout réel t ,
 $\sin^3(t) = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$. Ainsi,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t) \, dt$$

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation : pour tout réel t ,
 $\sin^3(t) = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$. Ainsi,

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t) dt = \left[-\frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{12} \cos(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation : pour tout réel t ,
 $\sin^3(t) = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t) \, dt = \left[-\frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{12} \cos(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4} \cos(0)\right) + \frac{1}{12} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{12} \cos(0) \end{aligned}$$

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation : pour tout réel t ,
 $\sin^3(t) = \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4} \sin(t) - \frac{1}{4} \sin(3t) \, dt = \left[-\frac{3}{4} \cos(t) + \frac{1}{12} \cos(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4} \cos(0)\right) + \frac{1}{12} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{12} \cos(0) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pour résumer, on a trouvé $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = \frac{2}{3}$.

Pour résumer, on a trouvé $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = \frac{2}{3}$.

Revenons à la question posée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \geq 0$ donc $(\sin(t))^n \geq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \geq 0$ donc $(\sin(t))^n \geq 0$ et $\sin(t) \leq 1$ donc $\sin(t) - 1 \leq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \geq 0$ donc $(\sin(t))^n \geq 0$ et $\sin(t) \leq 1$ donc $\sin(t) - 1 \leq 0$. Ainsi, $(\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n \leq 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \geq 0$ donc $(\sin(t))^n \geq 0$ et $\sin(t) \leq 1$ donc $\sin(t) - 1 \leq 0$. Ainsi, $(\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n \leq 0$ et donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \leq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $\sin(t) \geq 0$ donc $(\sin(t))^n \geq 0$ et $\sin(t) \leq 1$ donc $\sin(t) - 1 \leq 0$. Ainsi, $(\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n \leq 0$ et donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n dt \leq 0$.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ donc (I_n) est décroissante.

De plus, on a déjà justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,
 $(\sin(t))^n \geq 0$

De plus, on a déjà justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$,
 $(\sin(t))^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$.

De plus, on a déjà justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $(\sin(t))^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$. Ainsi, (I_n) est minorée par 0.

De plus, on a déjà justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \in [0; \frac{\pi}{2}]$, $(\sin(t))^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$. Ainsi, (I_n) est minorée par 0.

La suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle converge d'après le théorème des suites monotones.

Merci de m'avoir écouté !

Merci de m'avoir écouté !

Des questions ?