

Théorème et définition 20

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soit a et b deux réels appartenant à I . Alors, quelle que soit la primitive F de f , la différence $F(b) - F(a)$ prend la même valeur. Par définition, cette valeur est appelée l'intégrale de a et b de la fonction f et on la note $\int_a^b f(x) dx$.

Démonstration. Soit F et G deux primitives de f sur I . Alors, il existe une constante réelle c telle que $G = F + c$ donc

$$G(b) - G(a) = (F(b) + c) - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

Ainsi, la différence $F(b) - F(a)$ est indépendante de la primitive choisie. $\square$

Notation 21. On note $[F(x)]_a^b$ la différence $F(b) - F(a)$.

Remarque 22.

1. Par définition, on a donc $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ où F est n'importe quelle primitive de f . En particulier, si f est dérivable sur un intervalle I et si $a \in I$ alors, pour tout $x \in I$, $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$.
2. Cette définition ne suppose pas que $a < b$. En particulier, $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$.
3. Dans le cas où f est continue et positive et $a < b$, les « deux » définitions 1 et 15 coïncident.

Exemple 23. Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt \quad I_2 = \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx \quad I_3 = \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u du \quad I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t}.$$

$$I_1 = \int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = [-\cos(t)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -(-1) - (-(-1)) = 1 - 1 = 0$$

$$I_2 = \int_0^{\ln 3} e^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^{\ln 3} 2 \times \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx = \int_0^{\ln 3} \underbrace{2 \times \frac{1}{2}}_{u' e^u} e^{\frac{x}{2}} dx = \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_0^{\ln 3} = 2e^{\frac{\ln(3)}{2}} - 2e^{\frac{0}{2}} = 2e^{\ln(\sqrt{3})} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$$

$$I_3 = \int_{-1}^1 u^5 - 2u^3 + 2u du = \left[\frac{u^6}{6} - \frac{1}{2}u^4 + u^2 \right]_{-1}^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 \right) = 0$$

$$I_4 = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x} \ln(x)}_{u' u} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln(x))^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} (\ln(e))^2 - \frac{1}{2} (\ln(1))^2 = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t \ln t} = I_5 = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} dt = \int_e^{e^2} \underbrace{\frac{\frac{1}{t}}{\ln t}}_{\frac{u'}{u}} dt = [\ln |\ln(t)|]_e^{e^2} = [\ln(\ln(t))]_e^{e^2} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(2)$$

Propriété 24. — Linéarité de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel quelconque. Alors,

$$1. \int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$2. \int_a^b k \times f(x) \, dx = k \times \int_a^b f(x) \, dx.$$



Dans l'égalité 1, il est indispensable que les bornes soient les mêmes pour les 3 intégrales.

Dans l'égalité 2, il faut bien s'assurer que k est une constante i.e qu'elle ne dépend pas de x .

Démonstration. Soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a; b]$. Alors,

1. $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) + g(x) \, dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx. \end{aligned}$$

2. $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur $[a; b]$ donc

$$\begin{aligned} \int_a^b k \times f(x) \, dx &= [k \times F(x)]_a^b = k \times F(b) - k \times F(a) \\ &= k \times (F(b) - F(a)) = k \times \int_a^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

□

Exemple 25. Calculer $I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du$ et $J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt$.

Par linéarité de l'intégrale, on a

$$I = \int_0^1 3 - 4\sqrt{1-u^2} \, du = I = \int_0^1 3 \, du - 4 \int_0^1 \sqrt{1-u^2} \, du$$

et donc, grâce à l'exemple 4 et à la remarque 5,

$$I = 3 \times (1 - 0) - 4 \times \frac{\pi}{4} = 3 - \pi$$

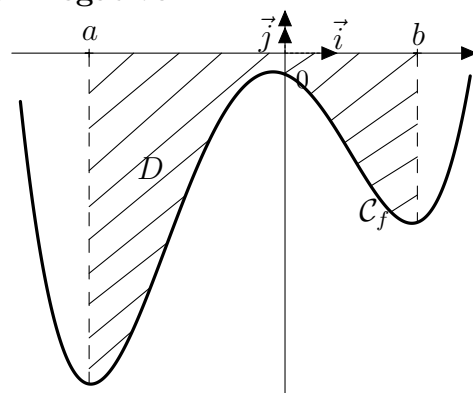
De même,

$$J = \int_0^\pi \cos^2 t \, dt + \int_0^\pi \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi \cos^2 t + \sin^2 t \, dt = \int_0^\pi 1 \, dt = 1 \times (\pi - 0) = \pi.$$

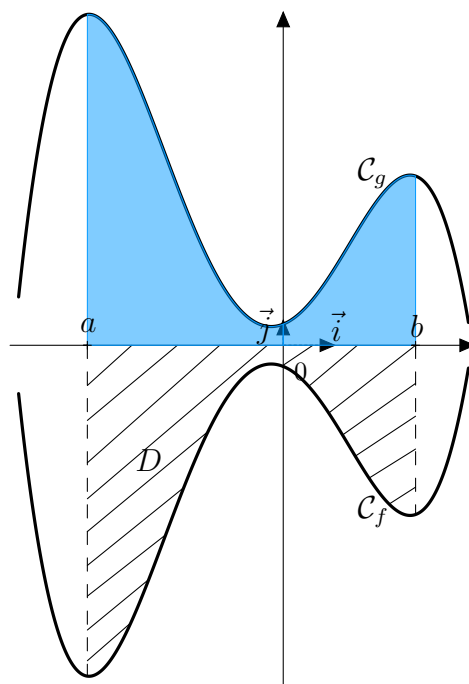
Interprétation graphique de l'intégrale d'une fonction négative

Soit f une fonction **continue et négative** sur $[a; b]$. Alors, l'intégrale de a à b de f s'interprète graphiquement comme l'opposé de l'aire sur la courbe i.e. l'opposé de la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Dans ce cas, c'est donc un nombre réel négatif sans unité.



En effet, si on note g la fonction définie sur $[a; b]$ par $g(x) = -f(x)$ alors la courbe de g est symétrique de celle de f par rapport à l'axe des abscisses.



Par symétrie, l'aire sur la courbe de f est égale à l'aire sous la courbe de g . Or, comme f est une fonction négative et continue sur $[a; b]$, g est positive et continue sur $[a; b]$. On a donc

$$D = \int_a^b g(t) dt = \int_a^b -f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$$

Ainsi, l'intégrale de f entre a et b est bien égale à l'opposée de l'aire de D .

Propriété 26. — Positivité et croissance de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux éléments de I tel que $a \leq b$. Alors,

1. **POSITIVITÉ DE L'INTÉGRALE** : si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.
2. **CROISSANCE DE L'INTÉGRALE** : si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.



Ces inégalités ne sont vraies que si $a \leq b$.

Démonstration.

1. 1^{ère} démonstration. Comme f est continue et positive, $\int_a^b f(x) dx$ est une aire donc c'est un nombre positif.

2^{ème} démonstration. Soit F est une primitive de f sur I . Alors, $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. Or, par définition, $F' = f$ est positive donc F est croissante sur I . Ainsi, comme $a \leq b$, $F(a) \leq F(b)$ et donc $F(b) - F(a) \geq 0$.

2. Considérons la fonction $h : x \mapsto f(x) - g(x)$ définie sur I . Comme f et g sont continues sur I , h est également continue sur I . De plus, comme $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$. Ainsi, $\int_a^b h(x) dx \geq 0$. Or, par linéarité,

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(x) - g(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

donc $\int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx \geq 0$ et ainsi $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

□

Exemple 27.

1. Comparer $I_1 = \int_0^1 e^t dt$ et $I_2 = \int_0^1 e^{t^2} dt$.
2. Montrer que la suite (I_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$ est décroissante et minorée. Que peut-on en déduire ?
1. Comme on intègre deux fonctions sur le même intervalle, il suffit de comparer les fonctions pour comparer les intégrales.
Or, pour tout $t \in [0; 1]$, $t^2 \leq t$ donc, par croissance de la fonction exp, $e^{t^2} \leq e^t$. Dès lors, par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 e^{t^2} dt \leq \int_0^1 e^t dt$ i.e. $I_2 \leq I_1$.
2. Ce n'est pas demandé dans l'énoncé mais calculons les premiers termes de la suite (I_n) .

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^0 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = 1 \times \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^1 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) = -0 + 1 = 1.$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) dt$$

Par calculer cette intégrale, nous allons utiliser les formules de duplication. On sait que, pour tout réel t , $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$ donc $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi,

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

donc

$$I_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin(\pi) - \frac{1}{2} \sin(0)\right] = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

$$I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^3 dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t) dt$$

1^{ère} méthode. On écrit $\sin^3(t) = \sin(t) \times \sin^2(t) = \sin(t) [1 - \cos^2(t)]$:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) [1 - \cos^2(t)] dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) - \sin(t) \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{(-\sin(t)) \cos^2(t)}_{u' u^2} dt \\ &= [-\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{3} \cos^3(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0)) + \frac{1}{3} \cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{3} \cos^3(0) \\ &= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

2^{ème} méthode. On a vu dans le complément du chapitre 10 la formule de linéarisation : pour tout réel t , $\sin^3(t) = \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t) \, dt = \left[-\frac{3}{4}\cos(t) + \frac{1}{12}\cos(3t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{3}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{3}{4}\cos(0)\right) + \frac{1}{12}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{1}{12}\cos(0) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Pour résumer, on a trouvé $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = 1$, $I_2 = \frac{\pi}{4}$ et $I_3 = \frac{2}{3}$.

Revenons à la question posée.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^{n+1} - (\sin(t))^n \, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \times (\sin(t))^n - (\sin(t))^n \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n \, dt \end{aligned}$$

Or, pour tout $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(t) \geq 0$ donc $(\sin(t))^n \geq 0$ et $\sin(t) \leq 1$ donc $\sin(t) - 1 \leq 0$.

Ainsi, $(\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n \leq 0$ et donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t) - 1) \times (\sin(t))^n \, dt \leq 0$.

On conclut que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n \leq 0$ donc (I_n) est décroissante.

De plus, on a déjà justifié que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $(\sin(t))^n \geq 0$ donc $I_n \geq 0$.

Ainsi, (I_n) est minorée par 0.

La suite (I_n) est décroissante et minorée donc elle converge d'après le théorème des suites monotones.