

Exercice 2 p. 274

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 7 \times 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -14.$$

Exercice 6 p. 274

- a. Comme B est le projeté orthogonal de F sur $[AB]$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2 = a^2$.
- b. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = AB \times AD \times \cos(\widehat{BAD}) = a^2 \cos(90^\circ) = 0$.
- c. $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -AC^2 = -(a\sqrt{2})^2 = -2a^2$.
- d. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et, comme B est le projeté orthogonal de C sur (AB) , $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = a^2$.

Exercice 7 p. 274

- a. $\vec{u} \cdot (2\vec{v}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = 10$.
- b. $\vec{u} \cdot (2\vec{v} + 5\vec{w}) = 2(\vec{u} \cdot \vec{v}) + 5(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 10 - 10 = 0$.
- c. $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = 3$.
- d. $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 5$.
- e. $(3\vec{u}) \cdot (3\vec{w}) = 9(\vec{u} \cdot \vec{w}) = -18$.
- f. $(3\vec{v} - 2\vec{w}) \cdot (5\vec{u}) = 15(\vec{v} \cdot \vec{u}) - 10(\vec{w} \cdot \vec{u}) = 15(\vec{u} \cdot \vec{v}) - 10(\vec{u} \cdot \vec{w}) = 95$.

Exercice 54 p. 276

- a. Comme le triangle SAB est équilatéral, $\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB}) = a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{2}$.
- b. Comme H est le centre du carré $ABCD$, H est le point d'intersection des diagonales de $ABCD$. Or, les diagonales d'un carré sont orthogonales donc $\widehat{AHD} = 90^\circ$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} &= (-\overrightarrow{HA}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HD} \\ &= -\frac{1}{2} \times HA \times HD \times \cos(\widehat{AHD}) = -\frac{1}{2} \times HA \times HD \times \cos(90^\circ) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- c. Le triangle ASC est isocèle en S donc la médiane (SH) est également la hauteur issue de S dans le triangle SBC . Il s'ensuit que $\widehat{SHC} = 90^\circ$. Dès lors,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{AC} &= (-\overrightarrow{HS}) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}\right) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HS} \cdot \overrightarrow{HC} \\ &= -\frac{1}{2} \times HS \times HC \times \cos(\widehat{SHC}) = -\frac{1}{2} \times HS \times HC \times \cos(90^\circ) \\ &= 0. \end{aligned}$$

- d. Remarquons que

$$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{SC} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\right) \cdot \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CS}) = \frac{1}{2} \times CD \times CS \times \cos(\widehat{DCS}) \\ &= \frac{1}{2}a^2 \cos(60^\circ) = \frac{a^2}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 57 p. 276

1. L'énoncé est vrai. En effet, considérons trois points A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Alors,

$$AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = AB \times AC.$$

Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $v = \vec{0}$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires car le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur. Sinon, $AB \neq 0$ et $AC \neq 0$ donc $AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = AB \times AC$ implique que $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{AB \times AC}{AB \times AC} = 1$ i.e. $\widehat{BAC} = 0^\circ$. Ainsi, les points A , B et C sont alignés donc les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

2. L'énoncé réciproque est « si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ ». Cet énoncé est faux. En effet, considérons un vecteur $\vec{u}$ non nul et posons $\vec{v} = -\vec{u}$. Alors, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires mais $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = -\|\vec{u}\|^2 \neq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| = \|\vec{u}\|^2$ car $\|\vec{u}\| \neq 0$.

Exercice 59 p. 276

1. On a $\overrightarrow{AB} (1; -4; 8)$ et $\overrightarrow{AC} (2; -1; 2)$ donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 2 + (-4) \times (-1) + 8 \times 2 = 22$, $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$.
2. On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$ donc $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC} = \frac{22}{9 \times 3} = \frac{22}{27}$. À l'aide de la calculatrice, on en déduit que $\widehat{BAC} \approx 0,62$ radians.