

Corrigés des exercices donnés pour le mardi 12 mai 2020

Exercice 39 p. 336

1. La fonction f est continue et positive sur $[1; e]$. De plus,

$$\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1) = 1$$

donc f est bien une densité de probabilité sur $[1; e]$.

2. a. $P(X < 2) = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^2 = \ln(2).$

$$P\left(X \geq \frac{4}{e}\right) = \int_{\frac{4}{e}}^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{\frac{4}{e}}^e = \ln(e) - \ln\left(\frac{4}{e}\right) = 1 - \ln(4) + \ln(e) = 2 - \ln(4).$$

$$P\left(\frac{e}{2} < X < \frac{3e}{4}\right) = \int_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{4}} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_{\frac{e}{2}}^{\frac{3e}{4}} = \ln\left(\frac{3e}{4}\right) - \ln\left(\frac{e}{2}\right) = \ln\left(\frac{3e}{4} \times \frac{2}{e}\right) = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

- b. L'espérance de X est

$$E(X) = \int_1^e x f(x) dx = \int_1^e 1 dx = e - 1.$$

Exercice 41 p. 336

1. La fonction f est continue et positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 1$$

donc f est une densité de probabilité sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

2. a. $P\left(X < \frac{\pi}{3}\right) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin(0) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

$$P\left(X > \frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b. $P_{(X > \frac{\pi}{4})}\left(X < \frac{\pi}{3}\right) = \frac{P\left(\left(X < \frac{\pi}{3}\right) \cap \left(X > \frac{\pi}{4}\right)\right)}{P\left(X > \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3}\right)}{P\left(X > \frac{\pi}{4}\right)}.$ Or,

$$P\left(\frac{\pi}{4} < X < \frac{\pi}{3}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$$

donc, d'après la question a.,

$$P_{(X > \frac{\pi}{4})}\left(X < \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}.$$

3. a. La fonction G est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ comme somme et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$G'(x) = 1 \times \sin(x) + x \times \cos(x) - \sin(x) = x \cos(x) = g(x)$$

donc G est une primitive de g sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. L'espérance de X est

$$E(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos(x) \, dx = G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G(0) = \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (0 \sin(0) + \cos(0))$$

$$\text{i.e. } E(X) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Exercice 47 p. 336

$$1. P(T \leq 10) = P(T \in [0; 10]) = \frac{10 - 0}{15 - 0} = \frac{2}{3}.$$

$$2. P(T \geq 0,5) = P(T \in [0,5; 15]) = \frac{15 - 0,5}{15 - 0} = \frac{29}{30}.$$

$$3. \text{ Le temps d'attente moyen est } E(T) = \frac{0 + 15}{2} = 7,5 \text{ min soit 7 minutes et 30 secondes.}$$

Exercice 52 p. 337. — Comme X suit une loi uniforme sur $[a; 28]$,

$$P(X > 16) = P(X \in]16; 28]) = \frac{28 - 16}{28 - a} = \frac{12}{28 - a}.$$

Or, on sait que $P(X > 16) = 0,6$ donc $\frac{12}{28 - a} = 0,6$ i.e. $28 - a = \frac{12}{0,6} = 20$. Ainsi, $a = 8$.

$$\text{Il s'ensuit que } E(X) = \frac{8 + 28}{2} = 18.$$

Exercice 54 p. 337

1. Le discriminant du trinôme $x^2 + x - 6$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ donc ce trinôme a deux racines réelles : $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -3$ et $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 2$. Ainsi, l'ensemble des solutions de $x^2 + x - 6 = 0$ est $\{-3, 2\}$.

De plus, comme $a = 1 > 0$, le trinôme $x^2 + x - 6$ est positif à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. On en déduit donc que l'ensemble des solutions de $x^2 + x - 6 \leq 0$ est $[-3; 2]$.

2. a. Il y a 6 entiers dans l'intervalle $[0; 5]$: 0, 1, 2, 3, 4 et 5. Il y a donc 6 possibilités.

b. On note X la variable aléatoire égale à l'entier choisi. Comme le choix se fait au hasard dans $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, la loi de X est l'équiprobabilité sur Ω . Ainsi, grâce à la question 1, la probabilité que X soit solution de $x^2 + x - 6 = 0$ est $P(X = 2) = \frac{1}{6}$.

c. De même, la probabilité que X soit solution de $x^2 + x - 6 \leq 0$ est $P(X \in \{0, 1, 2\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

3. a. En notant toujours X la variable aléatoire égale au réel choisi, ici, X suit une loi uniforme sur $[0; 5]$. Dès lors, la probabilité que X soit solution de $x^2 + x - 6 = 0$ est $P(X = 2) = 0$.

b. De même, la probabilité que X soit solution de $x^2 + x - 6 \leq 0$ est $P(X \in [0; 2]) = \frac{2 - 0}{5 - 0} = \frac{2}{5}$.

Exercice 55 p. 337. — Le discriminant du trinôme $15x^2 - 8x + 1$ est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 15 \times 1 = 4 > 0$ donc ce trinôme a deux racines réelles : $x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{4}}{2 \times 15} = \frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{4}}{2 \times 15} = \frac{1}{3}$. Comme $a = 15 > 0$, on en déduit que $15x^2 - 8x + 1 > 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; \frac{1}{5}] \cup [\frac{1}{3}; +\infty[$.

On modélise le choix d'un nombre au hasard dans l'intervalle $[0; 1]$ par une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. Ainsi, la probabilité d'obtenir un nombre x vérifiant $15x^2 - 8x + 1 > 0$ est

$$P\left(\left(X < \frac{1}{5}\right) \cup \left(X > \frac{1}{3}\right)\right) = 1 - P\left(X \in \left[\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]\right) = 1 - \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}}{1 - 0} = \frac{13}{15}.$$

Exercice 57 p. 337. — On note X la variable aléatoire égale au nombre choisi. On modélise l'expérience en disant que X suit une loi uniforme sur $[0; 1]$.

Remarquons que $0 \leq X \leq 1$ donc $0 \leq 2X \leq 2$ et $0,5 \leq 2X \leq 2,5$. Ainsi, les seuls entiers qui peuvent appartenir à l'intervalle $[2X; 2X + 0,5]$ sont 0, 1 ou 2.

Cependant, $0 \in [2X; 2X + 0,5]$ si et seulement si $X = 0$ ce qui se produit avec une probabilité nulle.

Ensuite,

$$1 \in [2X; 2X + 0,5] \Leftrightarrow 2X \leq 1 \text{ et } 2X + 0,5 \geq 1 \Leftrightarrow X \leq 0,5 \text{ et } X \geq 0,25 \Leftrightarrow X \in [0,25; 0,5]$$

et

$$2 \in [2X; 2X + 0,5] \Leftrightarrow 2X \leq 2 \text{ et } 2X + 0,5 \geq 2 \Leftrightarrow X \leq 1 \text{ et } X \geq 0,75 \Leftrightarrow X \in [0,75; 1].$$

Ainsi, $[2X; 2X + 0,5]$ contient un entier si et seulement si $X \in [0,25; 0,5] \cup [0,75; 1]$ donc la probabilité que $[2X; 2X + 0,5]$ ne contienne aucun entier est

$$\begin{aligned} 1 - P(X \in [0,25; 0,5] \cup [0,75; 1]) &= 1 - P(X \in [0,25; 0,5]) - P(X \in [0,75; 1]) \\ &= 1 - \frac{0,5 - 0,25}{1 - 0} - \frac{1 - 0,75}{1 - 0} \\ &= 0,5. \end{aligned}$$