

Corrigés des exercices sur la loi exponentielle

Exemple 23 du cours

1. a. La probabilité que la distance parcourue sans incident soit comprise entre 50 et 100 km est :

$$P(50 \leq D \leq 100) = \int_{50}^{100} \frac{1}{82} e^{-\frac{1}{82}t} dt = \left[-e^{-\frac{1}{82}t} \right]_{50}^{100} = -e^{-\frac{100}{82}} - \left(-e^{-\frac{50}{82}} \right) = e^{-\frac{25}{41}} - e^{-\frac{50}{41}}$$

donc $P(50 \leq D \leq 100) \approx 0,248$.

- b. La probabilité que la distance parcourue sans incident soit supérieure à 300 km est

$$\begin{aligned} P(D > 300) &= 1 - P(0 \leq D \leq 300) = 1 - \int_0^{300} \frac{1}{82} e^{-\frac{1}{82}t} dt \\ &= 1 - \left[-e^{-\frac{1}{82}t} \right]_0^{300} = 1 - \left(-e^{-\frac{300}{82}} - (-1) \right) = e^{-\frac{150}{41}} \end{aligned}$$

donc $P(D > 300) \approx 0,026$.

2. Comme la loi exponentielle est sans mémoire,

$$\begin{aligned} P_{(D \geq 350)}(D \geq 350 + 25) &= P(D \geq 25) = 1 - P(0 \leq D < 25) \\ &= 1 - \left[-e^{-\frac{1}{82}t} \right]_0^{25} = 1 - \left(-e^{-\frac{25}{82}} - (-1) \right) \\ &= e^{-\frac{25}{41}} \end{aligned}$$

donc $P_{(D \geq 350)}(D \geq 350 + 25) \approx 0,543$.

3. La distance moyenne parcourue sans incident est $E(D) = \frac{1}{\lambda} = 82$ km.
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$. Si d est un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

- a. Effectuer un trajet pour un autocar constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $P(X > d)$ en prenant comme succès : « l'autocar ne subit aucun incident au cours des d premiers kilomètres ».

Or,

$$P(X > d) = 1 - P(X \leq d) = 1 - \int_0^d \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^d = 1 - \left(-e^{-\lambda d} - (-1) \right) = e^{-\lambda d}.$$

Ainsi, l'épreuve de Bernoulli a pour paramètre $e^{-\lambda d}$.

Effectuer des trajets pour les N_0 autocars de l'entreprise revient à répéter N_0 fois cette épreuve de façon identique et indépendante : cela constitue donc un schéma de Bernoulli.

Ainsi, la variable aléatoire X_d qui compte le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $e^{-\lambda d}$.

- b. Le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres est $E(X_d) = N_0 e^{-\lambda d}$.

Exercice 10 p. 334

- a) $P(0,1 \leq T \leq 0,2) = \int_{0,1}^{0,2} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_{0,1}^{0,2} = -e^{-0,2} - (-e^{-0,1}) = e^{-0,1} - e^{-0,2} \approx 0,086.$
- b) $P(T \leq 1) = P(0 \leq T \leq 1) = \int_0^1 e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^1 = -e^{-1} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-1} \approx 0,632.$
- c) $P(T > 0,5) = 1 - P(0 \leq T \leq 0,5) = 1 - \int_0^{0,5} e^{-t} dt = 1 - [-e^{-t}]_0^{0,5} = 1 - (-e^{-0,5} - (-e^{-0})) = e^{-0,5} \approx 0,607.$

Exercice 12 p. 334

1. Comme la loi exponentielle est sans mémoire,

$$\begin{aligned} P_{(T \geq t)}(T \geq t+2) &= P(T \geq 2) = 1 - P(0 \leq T < 2) = 1 - \int_0^2 e^{-t} dt \\ &= 1 - [-e^{-t}]_0^2 = 1 - (e^{-2} - (-e^{-0})) = e^{-2} \approx 0,135 \end{aligned}$$

2. De même,

$$\begin{aligned} P_{(T \geq 2)}(T \geq t+2) &= P(T \geq t) = 1 - P(0 \leq T < t) = 1 - \int_0^t e^{-x} dx \\ &= 1 - [-e^{-x}]_0^t = 1 - (e^{-t} - (-e^{-0})) = e^{-t} \end{aligned}$$

Exercice 15 p. 334

1. La durée de vie moyenne est $E(T) = \frac{1}{\lambda} \approx 33,333$ siècles.
2. Soit t un réel. Alors,

$$P(T < t) = \int_0^t 0,03e^{-0,03x} dx = [-e^{-0,03x}]_0^t = -(e^{-0,03t} - (-e^{-0})) = 1 - e^{-0,3t}$$

donc

$$P(T < t) \geq 0,5 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,3t} \geq 0,5 \Leftrightarrow 0,5 \geq e^{-0,3t} \Leftrightarrow \ln(0,5) \geq -0,3t \Leftrightarrow \frac{\ln(0,5)}{-0,3} \geq t$$

Comme $\ln(0,5) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$, on a $\frac{\ln(0,5)}{-0,3} = \frac{\ln(2)}{0,3}$. Ainsi, $P(T < t) \geq 0,5$ pour tout $t \geq \frac{\ln(2)}{0,3}$.

Remarque. Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ , le nombre $\frac{\ln(2)}{\lambda}$ est appelé la demi-vie. Si T représente la durée de vie d'un ensemble d'éléments radioactifs, la demi-vie est le temps au bout duquel la moitié des éléments seront désintégrés.

Exercice 16 p. 334

1. À partir du graphique, on peut estimer que $\lambda = 1,5$.
2. On a $P(X < 1) = \int_0^1 1,5e^{-1,5t} dt = [-e^{-1,5t}]_0^1 = -e^{-1,5} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-1,5} \approx 0,777.$

Exercice 66 p. 338

1. a. D'après l'énoncé, $P(5 \leq T \leq 10) = \frac{1}{4}$. Or, comme T suit une loi exponentielle de paramètre λ ,

$$P(5 \leq T \leq 10) = \int_5^{10} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_5^{10} = -e^{-10\lambda} - (-e^{-5\lambda}) = e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda}.$$

Ainsi, $e^{-5\lambda} - e^{-10\lambda} = \frac{1}{4}$ donc $0 = -e^{-5\lambda} + e^{-10\lambda} + \frac{1}{4}$ i.e. $\boxed{e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} + \frac{1}{4} = 0}$.

- b. Posons $X = e^{-5\lambda}$.

Alors, $X^2 = (e^{-5\lambda})^2 = e^{-2 \times 5\lambda} = e^{-10\lambda}$ donc l'équation $e^{-10\lambda} - e^{-5\lambda} + \frac{1}{4} = 0$ se réécrit

$$X^2 - X + \frac{1}{4} = 0. \text{ Or,}$$

$$X^2 - X + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow X = \frac{1}{2}$$

donc $e^{-5\lambda} = \frac{1}{2}$ i.e. $-5\lambda = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2)$ et, finalement, $\boxed{\lambda = \frac{\ln(2)}{5}}$.

2. Remarque : Comme $\frac{\ln(2)}{5} \approx 0,14$, la valeur de l'énoncé est cohérente avec le résultat de la question 1.b.

- a. Par théorème, $E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0,14} \approx 7,143$. Or, $0,143\text{h} = \frac{143}{1000} \times 60\text{min} = 8,58\text{min}$ donc $\boxed{E(T) \approx 7\text{h } 09\text{min}}$. Ce nombre représente le temps moyen entre deux pannes consécutives.

- b. La probabilité que le temps de fonctionnement soit supérieur à 5 heures est

$$\begin{aligned} P(T \geq 5) &= 1 - P(T < 5) = 1 - \int_0^5 \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^5 \\ &= 1 - \left(-e^{-5\lambda} - (-e^0) \right) = 1 + e^{-5\lambda} - 1 = e^{-5\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(T \geq 5) = e^{-0,7} \approx 0,497}$.

- c. On cherche $P_{(T \geq 4)}(T \geq 9)$. Comme la loi exponentielle est sans mémoire, on a $P_{(T \geq 4)}(T \geq 9) = P_{(T \geq 4)}(T \geq 4 + 5) = P(T \geq 5)$ donc, d'après la question précédente, $\boxed{P_{(T \geq 4)}(T \geq 9) \approx 0,497}$.

Exercice 67 p. 338

1. La durée de vie moyenne d'un composant est $E(T) = \frac{1}{\lambda}$ i.e. 700 heures.
2. Dire que le composant n'a pas de défaillance durant les 120 premiers jours équivaut à dire que sa durée de vie est au moins de 120 jours. La probabilité cherchée est donc

$$\begin{aligned} P(T \geq 120) &= 1 - P(T < 120) = 1 - \int_0^{120} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{120} \\ &= 1 - \left(-e^{-120\lambda} - (-e^0) \right) = 1 + e^{-120\lambda} - 1 = e^{-120\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(T \geq 120) = e^{-\frac{120}{700}} = e^{-\frac{6}{35}} \approx 0,842}$.

3. Ici, et dans la suite, on ne tient pas compte des années bissextiles et on suppose que chaque année compte exactement 365 jours.

La probabilité cherchée est donc

$$\begin{aligned} P(T \geq 2 \times 365) &= P(T \geq 730) = 1 - P(T < 730) = 1 - \int_0^{730} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{730} \\ &= 1 - \left(-e^{-730\lambda} - (-e^0) \right) = 1 + e^{-730\lambda} - 1 = e^{-730\lambda}. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{P(T \geq 730) = e^{-\frac{730}{700}} = e^{-\frac{73}{70}} \approx 0,352}$.

4. On cherche $P_{(T \geq 2 \times 365)}(T \geq 5 \times 365)$ i.e. $P_{(T \geq 730)}(T \geq 1825)$. Or, comme la loi exponentielle est sans mémoire, $P_{(T \geq 730)}(T \geq 1825) = P_{(T \geq 730)}(T \geq 730 + 1095) = P(T \geq 1095)$. De plus,

$$\begin{aligned} P(T \geq 1095) &= 1 - P(T < 1095) = 1 - \int_0^{1095} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{1095} \\ &= 1 - \left(-e^{-1095\lambda} - (-e^0) \right) = 1 + e^{-1095\lambda} - 1 = e^{-1095\lambda} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P_{(T \geq 2 \times 365)}(T \geq 5 \times 365) = e^{-\frac{1095}{700}} = e^{-\frac{219}{140}} \approx 0,209}$.

5. Notons t le temps, en jours, au bout duquel exactement 10% des composants sont en panne (en supposant qu'on dispose d'un très grand stock de composants). Choisissons un composant au hasard au temps t . D'une part, la probabilité qu'il soit en panne est 10% i.e. 0,1. D'autre part, dire que ce composant est en panne à l'instant t signifie qu'il est tombé en panne entre les instants 0 et t et donc que sa durée de vie est inférieure à t . Ainsi, la probabilité que le composant soit en panne est $P(T < t)$. On a donc l'égalité $P(T < t) = 0,1$.

Or,

$$P(T < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}.$$

Ainsi, le temps t vérifie $1 - e^{-\lambda t} = 0,1$ i.e. $e^{-\lambda t} = 0,9$ donc $-\lambda t = \ln(0,9)$ et ainsi $t = \frac{-\ln(0,9)}{\lambda}$ soit $t = -700 \ln(0,9)$. Finalement $t \approx 73,75$ jours donc on atteint un taux de 10% des composants en panne au cours du 74-ième jour.

6. Comme les composants sont montés en série, la console fonctionne encore au bout de 300 jours si et seulement si le composant A et le composant B sont encore en fonctionnement (on suppose implicitement qu'il n'y a pas d'autres motifs de panne pour la console que la panne de A ou de B). Ainsi, la probabilité que la console fonctionne encore au bout de 300 jours est égale à $P([T_A > 300] \cap [T_B > 300])$.

Comme les événements $[T_A > 300]$ et $[T_B > 300]$ sont indépendants par hypothèse,

$$P([T_A > 300] \cap [T_B > 300]) = P(T_A > 300) \times P(T_B > 300).$$

De plus, comme T_A et T_B ont la même loi, $P(T_A > 300) = P(T_B > 300)$ et ainsi $P([T_A > 300] \cap [T_B > 300]) = P(T_A > 300)^2$. Or,

$$\begin{aligned} P(T_A > 300) &= 1 - P(T_A \leq 300) = 1 - \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{300} \\ &= 1 - \left(-e^{-300\lambda} - (-e^0) \right) = 1 + e^{-300\lambda} - 1 = e^{-300\lambda} \end{aligned}$$

donc $\boxed{P([T_A > 300] \cap [T_B > 300]) = \left(e^{-\frac{300}{700}} \right)^2 = e^{-\frac{6}{7}} \approx 0,424}$.