

Correction du sujet B p. 259

1. a. Comme I est le milieu de [AB], $I\left(\frac{-1+3}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{2-4}{2}\right)$ soit $\boxed{I(1; 1; -1)}$. De même, comme K est le milieu de [CD], $K\left(\frac{1+5}{2}; \frac{-4-2}{2}; \frac{2+4}{2}\right)$ soit $\boxed{K(3; -3; 3)}$. Enfin, les coordonnées de $\overrightarrow{BC}$

sont $(-2; -6; 6)$ donc, on déduit de l'égalité $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ que
$$\begin{cases} x_J - 3 = \frac{1}{4} \times (-2) \\ y_J - 2 = \frac{1}{4} \times (-6) \\ z_J - (-4) = \frac{1}{4} \times 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_J = \frac{5}{2} \\ y_J = \frac{1}{2} \\ z_J = -\frac{5}{2} \end{cases} \text{ i.e. } \boxed{J\left(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{5}{2}\right)}.$$

- b. Les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ sont $\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ et celle de $\overrightarrow{IK}$ sont $(2; -4; 4)$. Etant donné que $x_{\overrightarrow{IJ}}y_{\overrightarrow{IK}} = \frac{3}{2} \times (-4) = -6$ et $x_{\overrightarrow{IK}}y_{\overrightarrow{IJ}} = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \neq -6$, les coordonnées de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas proportionnelles et donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires. Il s'ensuit que les points I, J et K ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

2. Le plan (IJK) passe par I et est dirigé par $2\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ donc une représentation paramétrique de (IJK) est
$$\begin{cases} x = 1 + 3k + 2k' \\ y = 1 - k - 4k' \\ z = -1 - 3k + 4k' \end{cases} \text{ où } (k, k') \in \mathbb{R}^2. \text{ De même, la droite (AD) passe par A et est}$$

dirigée par $\overrightarrow{AD} (6; -2; 2)$ donc une représentation paramétrique de (AD) est
$$\begin{cases} x = -1 + 6t \\ y = -2t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \text{ où}$$

$t \in \mathbb{R}$. Etudions l'intersection de (IJK) et de (AD). Pour cela, on résout le système suivant :

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 + 3k + 2k' = -1 + 6t \\ 1 - k - 4k' = -2t \\ -1 - 3k + 4k' = 2 + 2t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -2 + 6t - 2k' \\ 3 - 3k - 12k' = -6t \\ -(-2 + 6t - 2k') + 4k' = 3 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -2 + 6t - 2k' \\ 3 - (-2 + 6t - 2k') - 12k' = -6t \\ 2 - 6t + 2k' + 4k' = 3 + 2t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -2 + 6t - 2k' \\ 5 - 6t + 2k' - 12k' = -6t \\ -8t + 6k' = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3k = -2 + 6t - 2k' \\ 5 = 10k' \\ -8t + 6k' = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} k = -\frac{1}{2} \\ k' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{4} \end{cases} \end{aligned}$$

Comme ce système admet une unique solution, le plan (IJK) et la droite (AD) sont sécants et leur point d'intersection est le point de (AD) de paramètre $t = \frac{1}{4}$ i.e. de coordonnées $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$.

3. Comme $\overrightarrow{IL} = -\overrightarrow{IJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$, les coordonnées de $\overrightarrow{IL}$ sont $\left(-\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 2; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-4); \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \times 4\right)$ i.e. $\overrightarrow{IL} \left(-\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{7}{2}\right)$. Ainsi,
$$\begin{cases} x_L - 1 = -\frac{1}{2} \\ y_L - 1 = -\frac{3}{2} \\ z_L - (-1) = \frac{7}{2} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} x_L = \frac{1}{2} \\ y_L = -\frac{1}{2} \\ z_L = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ i.e. } \boxed{L\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)}. \text{ Il s'ensuit que}$$

L est bien le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (AD).

Correction du sujet E p. 260

1. a. Une vecteur directeur de (d_1) est $\vec{u}_1(1; 3; 0)$ et un vecteur directeur de (d_2) est $\vec{u}_2(2; 1; -1)$.
 b. Etant donné que $x_{\vec{u}_1}y_{\vec{u}_2} = 1 \times 1 = 1$ et $x_{\vec{u}_2}y_{\vec{u}_1} = 3 \times 2 = 6 \neq 1$, les coordonnées de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, (d_1) et (d_2) ne sont pas parallèles.

Etudions l'intersection de ces deux droites. Pour cela on résout le système :

$$\begin{cases} 3 + a = 0,5 + 2b \\ 9 + 3a = 4 + b \\ 2 = 4 - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 + a = 4,5 \\ 9 + 3a = 6 \\ b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1,5 \text{ [1]} \\ a = -1 \text{ [2]} \\ b = 2 \end{cases}.$$

Comme les équations [1] et [2] sont incompatibles, le système n'a pas de solution donc l'intersection de (d_1) et (d_2) est vide donc (d_1) et (d_2) ne sont pas sécantes.

Ainsi, (d_1) et (d_2) ne sont ni sécantes ni parallèles donc elles sont non coplanaires.

2. a. Le point A(3; 9; 2) appartient à (d_1) donc le vecteur $\overrightarrow{SA}(0; 5; 1,9)$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}_1$. Comme ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{u}_1$, le plan $\mathcal{P}_1$ est dirigé par $\overrightarrow{SA}$ et $\vec{u}_1$. Etudions la coplanarité de $\overrightarrow{SA}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

$$\vec{u}_2 = a\overrightarrow{SA} + b\vec{u}_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = b \\ 1 = 5a + 3b \\ -1 = 1,9a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 1 = 5 \times \frac{10}{19} + 3 \times 2 \\ a = -\frac{10}{19} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ 1 = \frac{164}{19} \text{ [1]} \\ a = \frac{10}{19} \end{cases}.$$

Comme [1] est absurde, le système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{SA}$, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas coplanaires et donc (d_2) est sécante à $\mathcal{P}_1$.

- b. Le point B(0,5; 4; 4) appartient à (d_2) donc le vecteur $\overrightarrow{SB}(-2,5; 0; 3,9)$ est un vecteur du plan $\mathcal{P}_2$. Comme ce vecteur n'est pas colinéaire à $\vec{u}_2$, le plan $\mathcal{P}_2$ est dirigé par $\overrightarrow{SB}$ et $\vec{u}_2$. Etudions la coplanarité de $\overrightarrow{SB}$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_1$.

$$\vec{u}_1 = a\overrightarrow{SB} + b\vec{u}_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2,5a + 2b \\ 3 = b \\ 0 = 3,9a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -2,5a + 2b \\ b = 3 \\ a = \frac{10}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2,5 \times \frac{10}{13} + 2 \times 3 \\ b = 3 \\ a = \frac{10}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \frac{103}{13} \text{ [1]} \\ b = 3 \\ a = \frac{10}{13} \end{cases}.$$

Comme [1] est absurde, le système n'a pas de solution donc les vecteurs $\overrightarrow{SB}$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_1$ ne sont pas coplanaires et donc (d_1) est sécante à $\mathcal{P}_2$.

- c. L'affirmation est vraie. Notons C le point d'intersection de $\mathcal{P}_1$ et (d_2) et D le point d'intersection de $\mathcal{P}_2$ et (d_1) . Remarquons que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas strictement parallèles car ils possèdent le point S en commun et qu'ils ne sont pas confondus car (d_1) et (d_2) ne sont pas coplanaires. Ainsi, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ . Or, C appartient à $\mathcal{P}_2$ et à $(d_1) \subset \mathcal{P}_1$ donc C appartient à Δ . De même, D appartient à $\mathcal{P}_1$ et à $(d_2) \subset \mathcal{P}_2$ donc D appartient à Δ . Ainsi, $\Delta = (CD)$. Enfin, S est commun à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ donc $S \in (CD)$. Ainsi, si on choisit $(R) = (CD)$ alors (R) coupe (d_1) en C et (d_2) en D.