Corrigé d'exercices sur les lois normales (suite)

86 p. 340

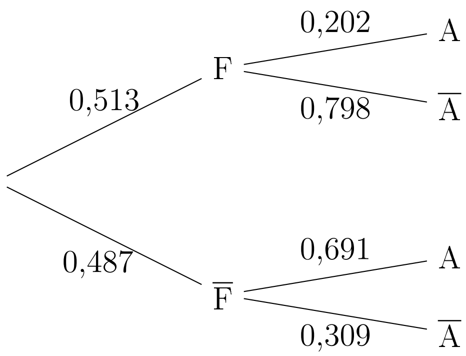
1. La distance moyenne parcourue par un camion en une journée est $E(X) = \mu = 120$ km.
2. (a) À l'aide de la calculatrice, $P(110 \leqslant X \leqslant 130) \approx 0{,}525$.
   (b) De même, $P(X \geqslant 105) = P(105 \leqslant X < 120) + 0{,}5 \approx 0{,}858$.
3. Notons n le nombre de camions parcourant moins de 130 km en une journée. En approchant la fréquence par la probabilité, on a $\frac{n}{150} \approx P(X \leqslant 130) = 0{,}5 + P(120 \leqslant X \leqslant 130) \approx 0{,}762$ donc $n \approx 114$.

91 p. 340.

1. Notons n_F le nombre de filles dont le score est supérieur à 130. Alors, en approchant la fréquence par la probabilité, on a $\frac{n_F}{600} \approx P(X \geqslant 130) = 0{,}5 - P(115 < X \leqslant 130) \approx 0{,}067$ donc $n_F \approx 40$.
2. Notons n_G le nombre de garçons dont le score est inférieur à 115. Alors, en approchant la fréquence par la probabilité, on a $\frac{n_G}{800} \approx P(Y \leqslant 115) = 0{,}5 - P(115 \leqslant Y < 130) \approx 0{,}159$ donc $n_G \approx 127$.

95 p. 341

1. $P_F(A) = P(X > 170) = 0{,}5 - P(165 < X < 170) \approx 0{,}202$ et $P_{\overline{F}}(A) = P(Y > 170) = 0{,}5 + P(170 < Y < 174) \approx 0{,}691$.
2. On peut traduire la situation par l'arbre suivant :



   Comme F et $\overline{F}$ forment une partition de l'univers, grâce à la formule de probabilités totales, $P(A) = P(F)P_F(A) + P(\overline{F})P_{\overline{F}}(A) \approx 0{,}513 \times 0{,}202 + 0{,}487 \times 0{,}691$ soit $P(A) \approx 0{,}440$.
3. On en déduit que $P_A(F) = \frac{P(A \cap F)}{P(A)} \approx \frac{0{,}513 \times 0{,}202}{0{,}44}$ soit $P_A(F) \approx 0{,}236$.

97 p. 341. Graphiquement, $\mu = 3$. On sait, de plus, que $P(2 < X < 4) = 0{,}88$. Or,

$$2 < X < 4 \Leftrightarrow -1 < X - 3 < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\sigma} < \frac{X-3}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}$$

Posons $Y = \frac{X-3}{\sigma}$. Alors, Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $P(-\frac{1}{\sigma} < Y < \frac{1}{\sigma}) = 0{,}88$. On en déduit, par symétrien que $P(0 < Y < frac1\sigma) = 0{,}44$ donc $P(Y < \frac{1}{\sigma}) = 0{,}5 + 0{,}44 = 0{,}94$.

À l'aide de la calculatrice, il s'ensuit que $\frac{1}{\sigma} \approx 1{,}555$ donc $\sigma \approx 0{,}64$.

100 p. 342. Posons $Y = \frac{X-\mu}{\sigma}$. Alors, Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$. De plus,

$$X \geqslant 1100 \Leftrightarrow X - \mu \geqslant 1100 - \mu \Leftrightarrow Y \geqslant \frac{1100-\mu}{\sigma}$$

et

$$X \leqslant 1600 \Leftrightarrow X - \mu \leqslant 1600 - \mu \Leftrightarrow Y \leqslant \frac{1600-\mu}{\sigma}$$

donc $P\left(Y < \frac{1100-\mu}{\sigma}\right) = 1 - P\left(Y \geqslant \frac{1100-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}0668$ donc, à l'aide de la calculatrice, $\frac{1100-\mu}{\sigma} \approx -1{,}5$ et $P\left(Y \leqslant \frac{1600-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8413$ donc, à l'aide de la calculatrice, $\frac{1600-\mu}{\sigma} \approx 1$. Ainsi, $1100-\mu \approx -1{,}5\sigma$ et $1600-\mu \approx \sigma$ donc $\mu \approx 1600-\sigma$ et $1100-(1600-\sigma) \approx -1{,}5\sigma$. On en déduit que $2{,}5\sigma \approx 500$ donc $\sigma \approx 200$ et $\mu \approx 1400$.

4 p. 364. Ici, $n = 1000 \geq 30$, $np = 1000 \times 0{,}71 = 710 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 1000 \times 0{,}39 = 390 \geqslant 5$ donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la proportion d'internautes de 11 ans et plus est

$$I_{1000} = \left[0{,}71 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}71 \times 0{,}39}}{\sqrt{1000}}\,;0{,}71 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}71 \times 0{,}39}}{\sqrt{1000}}\right] \approx [0{,}68\,;0{,}74]$$

6 p. 364. Ici, $n = 400 \geq 30$, $np = 400 \times 0{,}4 = 160 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 400 \times 0{,}6 = 240 \geqslant 5$ donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 99% de la fréquence F_n est

$$I_{400} = \left[0{,}4 - 2{,}58\frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{400}}\,;0{,}4 + 2{,}58\frac{\sqrt{0{,}4 \times 0{,}6}}{\sqrt{400}}\right] \approx [0{,}33\,;0{,}47]$$

7 p. 364. L'amplitude de l'intervalle est $2 \times 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{\sqrt{n}} = \frac{1{,}96}{\sqrt{n}}$ donc $\frac{1{,}96}{\sqrt{n}} = 0{,}049$ donc $\sqrt{n} = \frac{1{,}96}{0{,}049}$ i.e. $n = (\frac{1{,}96}{0{,}049})^2$. On en déduit que $n \approx 1600$.

8 p. 364

1. Ici, $n = 900 \geqslant 30$, $np = 900 \times 0{,}75 = 675 \geqslant 5$ et $n(1-p) = 900 \times 0{,}25 = 225 \geqslant 5$ donc un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil 95% de la fréquence de personnes favorables à l'autoroute est
$$I_{900} = \left[0{,}75 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}75 \times 0{,}25}}{\sqrt{900}}\,;0{,}75 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}75 \times 0{,}25}}{\sqrt{900}}\right] \approx [0{,}72\,;0{,}78]\,.$$
2. La règle de prise de décision est la suivante : on calcule la fréquence f de personnes favorables à l'autoroute dans l'échantillon de taill 900. Si $f \in I_{900}$ alors on accepte l'hypothèse du président du conseil régional et si $f \notin I_{900}$ alors on l'a rejette.
3. Dans notre cas, $f = \frac{550}{900} \approx 0{,}61 \notin I_{900}$ donc l'affirmation du président du conseil régional n'est pas acceptable.

10 p. 364. Ici, $n = 350 \geqslant 30$, $nf = 63 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 287 \geqslant 5$ donc un intervalle de confiance de la proportion de personnes n'ayant lu aucun livre au seuil de confiance 95% est

$$I = \left[\frac{63}{350} - \frac{1}{\sqrt{350}}\,;\frac{63}{350} + \frac{1}{\sqrt{350}}\right] \approx [0{,}12\,;0{,}24]\,.$$

12 p. 364. Ici, $n = 400 \geqslant 30$, $nf = 32 \geqslant 5$ et $n(1-f) = 368 \geqslant 5$ donc un intervalle de confiance de la proportion de personnes n'ayant lu aucun livre au seuil de confiance 95% est

$$I = \left[\frac{32}{400} - \frac{1}{\sqrt{400}}\,;\frac{32}{400} + \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0{,}03\,;0{,}13]\,.$$