Corrigé d'exercices sur les lois normales

17 p. 335. — À l'aide de la calculatrice,

a. $P(1 < X \leqslant 2) \approx 0{,}136$

b. $P(-0{,}5 < X < 1{,}3) \approx 0{,}595$

c. $P(-0{,}254 \leqslant X \leqslant -0{,}032) \approx 0{,}087$

d. $P(-0{,}3154 < X \leqslant 0{,}5779) \approx 0{,}566$.

19 p. 335. — À l'aide de la calculatrice,

a. $P(X > 1{,}25) = P(X \geqslant 0) - P(0 \leqslant X \leqslant 1{,}25) = 0{,}5 - P(0 \leqslant X \leqslant 1{,}25) \approx 0{,}0{,}106$

b. $P(X < 0{,}47) = P(X \leqslant 0) + P(0 < X < 0{,}47) = 0{,}5 + P(0 < X < 0{,}47) \approx 0{,}681$

c. $P(X < -0{,}235) = P(X \leqslant 0) - P(-0{,}235 \leqslant X \leqslant 0) = 0{,}5 - P(-0{,}235 \leqslant X \leqslant 0) \approx 0{,}407$

d. $P(X \geqslant 0{,}058) = P(X \geqslant 0) - P(0 \leqslant X < 0{,}058) = 0{,}5 - P(0 \leqslant X < 0{,}058) \approx 0{,}477$.

23 p. 335. — À l'aide de la calculatrice, $a \approx 0{,}396$.

24 p. 335. — À l'aide de la calculatrice, $b \approx -0{,}793$.

25 p. 335. — Comme $P(X > a) = 0{,}158$ si et seulement si $P(X \leqslant a) = 1 - 0{,}158 = 0{,}842$, à l'aide de la calculatrice, $a \approx 1{,}003$.

26 p. 335. — Comme $P(X \geqslant b) = 0{,}573$ si et seulement si $P(X < a) = 1 - 0{,}573 = 0{,}427$, à l'aide de la calculatrice, $b \approx -0{,}184$.

27 p. 335

1. Soit un réel a. Alors, par symétrie, $P(-a < X < a) = 2P(0 \leqslant 0 < a)$. Or, par définition, $\Phi(a) = P(X < a) = P(X < 0) + P(0 \leqslant X < a) = 0{,}5 + P(0 \leqslant X < a)$ donc $P(0 \leqslant X < a) = \Phi(a) - 0{,}5$. Ainsi, $P(-a < X < a) = 2[\Phi(a) - 0{,}5]$ c'est-à-dire $P(-a < X < a) = 2\Phi(a) - 1$.

2. Soit un réel a. On déduit de la question **1.** que $P(-a < X < a) = 0{,}92$ si et seulement si $2\Phi(a) - 1 = 0{,}92$ c'est-à-dire $\Phi(a) = \dfrac{1 + 0{,}92}{2} = 0{,}96$.
Ainsi, $P(-a < X < a) = 0{,}92$ équivaut à $\Phi(a) = 0{,}96$.

3. D'après la calculatrice, on conclut que $a \approx 1{,}751$.

28 p. 335. — À l'aide de la calculatrice, avec $\mu = 15$ et $\sigma = 4$,

a. $P(10 < X < 20) \approx 0{,}789$

b. $P(X < 18) = P(X \leqslant 15) + P(15 < X < 18) = 0{,}5 + P(15 < X < 18) \approx 0{,}773$

c. $P(X \geqslant 16) = P(X \geqslant 15) - P(15 < X \leqslant 16) = 0{,}5 - P(15 < X \leqslant 16) \approx 0{,}401$

d. $P(X < 30) = P(X \leqslant 15) + P(15 < X \leqslant 30) = 0{,}5 + P(15 < X \leqslant 30) \approx 1$.

30 p. 335. — À l'aide de la calculatrice, avec $= \mu = -50$ et $\sigma = 30$,

a. $P(-70 \leqslant X \leqslant -10) \approx 0{,}656$

b. $P(-60 < X < 10) \approx 0{,}608$

c. $P(X < -100) = P(X \leqslant -50) - P(-100 \leqslant X \leqslant -50) = 0{,}5 - P(-100 \leqslant X \leqslant -50) \approx 0{,}048$

d. $P(X \geqslant 3) = P(X \geqslant -50) - P(-50 \leqslant X < 3) = 0{,}5 - P(-50 \leqslant X < 3) \approx 0{,}039$.

31 p. 335

a. $P(22 \leqslant X \leqslant 38) \approx 0{,}890$ donc la probabilité que le délai de livraison soit compris entre 22 et 38 jours est environ 0,890.

b. $P(X \leqslant 27) = P(X \leqslant 30) - P(27 \leqslant X \leqslant 30) = 0{,}5 - P(27 \leqslant X \leqslant 30) \approx 0{,}274$ donc la probabilité que le délai de livraison soit inférieur à 27 jours est environ 0,274.

c. $P(X \geqslant 35) = P(X \geqslant 30) - P(30 \leqslant X < 35) = 0{,}5 - P(30 \leqslant X < 35) \approx 0{,}159$ donc la probabilité que le délai de livraison soit supérieur à 35 jours est environ 0,159.

33 p. 335. — Le variable aléatoire Y suit une loi normale d'espérance $\mu = 16$ et d'écart-type $\sigma = \sqrt{0{,}0196} = 0{,}14$. Dès lors, à l'aide de la calculatrice, $P(15{,}7 \leqslant Y \leqslant 16{,}2) \approx 0{,}907$ donc la probabilité qu'une pièce tirée au hasard soit acceptée est environ 0,907.

34 p. 335. — Ici, $\mu = 40$ et $\sigma = 5$. À l'aide de la calculatrice, on trouve

1. $a \approx 45{,}492$

2. $b \approx 39{,}712$

3. comme $P(X \geqslant c) = 0{,}375$ si et seulement si $P(X < c) = 1 - 0{,}375 = 0{,}625$, $c \approx 41{,}593$

4. comme $P(X > d) = 0{,}698$ si et seulement si $P(X \leqslant d) = 1 - 0{,}698 = 0{,}302$, $d \approx 37{,}407$

36 p. 335

1. Étant donné que

$$200 - \alpha < X < 200 + \alpha \Leftrightarrow -\alpha < X - 200 < \alpha \Leftrightarrow -\frac{\alpha}{25} < \frac{X-200}{25} < \frac{\alpha}{25},$$

$P(200 - \alpha < X < 200 + \alpha) = P\left(-\frac{\alpha}{25} < \frac{X-200}{25} < \frac{\alpha}{25}\right)$ et le problème revient donc à déterminer α tel que $P\left(-\frac{\alpha}{25} < \frac{X-200}{25} < \frac{\alpha}{25}\right) = 0{,}8$.

2. L'espérance de X est $\mu = 200$ et son écart-type est $\sigma = \sqrt{625} = 25$ donc, par définition, la variable $Y = \dfrac{X-200}{25}$ suit une loi normale centrée réduite.

3. Soit un réel $\alpha > 0$. Par symétrie, $P\left(-\frac{\alpha}{25} < Y < \frac{\alpha}{25}\right) = 2P\left(0 \leqslant Y < \frac{\alpha}{25}\right)$. De plus, comme $\alpha > 0$,

$$\Phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) = P\left(Y \leqslant \frac{\alpha}{25}\right) = P(X \leqslant 0) + P\left(0 < X \leqslant \frac{\alpha}{25}\right) = 0{,}5 + P\left(0 < X \leqslant \frac{\alpha}{25}\right)$$

donc

$$P\left(-\frac{\alpha}{25} < Y < \frac{\alpha}{25}\right) = 2\left[\Phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) - 0{,}5\right] = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) - 1.$$

Le problème revient donc à chercher α tel que $2\Phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) - 1 = 0{,}8$.

4. Or, $2\Phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) - 1 = 0{,}8$ si et seulement si $\Phi\left(\frac{\alpha}{25}\right) = \frac{1+0{,}8}{2} = 0{,}9$ et, à l'aide de la calculatrice (puisque Y suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$), on conclut que $\frac{\alpha}{25} \approx 1{,}28155$ et donc $\alpha \approx 32{,}039$.