

Correction de l'exercice 3 de la fiche « Intégrales et primitives »

Exercice 3

1. Comme la fonction inverse est décroissante sur $[k; k+1]$, pour tout $t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$ donc, d'après

les inégalités de la moyenne, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq (k+1-k) \times \frac{1}{k}$ c'est-à-dire $\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}}$.

2. On en déduit que

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \geq \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{t} dt + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt$$

donc, par la relation de Chasles répétée $n-1$ fois,

$$H_n \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(1)$$

c'est-à-dire $\boxed{H_n \geq \ln(n+1)}$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on déduit du théorème de comparaison que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n = +\infty}$.

3. a. On a montré en question 1 que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k}$ donc $a_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq 0$. Par ailleurs, comme

la fonction inverse est décroissante sur l'intervalle $[k; k+1]$, pour tout $t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{t} \geq \frac{1}{k+1}$

donc, d'après les inégalités de la moyenne, $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \geq (k+1-k) \times \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$. Il s'ensuit

que $-\int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq -\frac{1}{k+1}$ donc $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ i.e. $a_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. On conclut que

$$\boxed{0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}.$$

- b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de la question précédente que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

car tous les termes de la somme s'annulent 2 à 2 sauf le premier et le dernier. Etant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n+1} > 0$, on en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leq 1$ i.e. la suite (S_n) est majorée par 1. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$ car $a_{n+1} \geq 0$ donc la suite (S_n) est croissante. Par le théorème des suites monotones, on conclut que (S_n) converge vers un réel $\gamma \leq 1$. De plus, comme (S_n) est à termes positifs, on peut même affirmer que $\gamma \in [0; 1]$.

- c. Remarquons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} S_n &= 1 - \int_1^2 \frac{1}{t} dt + \frac{1}{2} - \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \frac{1}{3} - \int_3^4 \frac{1}{t} dt + \cdots + \frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \left(\int_1^2 \frac{1}{t} dt + \int_2^3 \frac{1}{t} dt + \int_3^4 \frac{1}{t} dt + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{t} dt \right) \\ &= H_n - \int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = H_n - \ln(n+1). \end{aligned}$$

Dès lors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n = S_n + \ln(n+1)$ donc $H_n - \ln n = S_n + \ln(n+1) - \ln n$. D'une part, on a montré que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \gamma$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$ (par continuité de $\ln$ en 1) donc, par composition,

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 0$. Par somme, on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n - \ln n = \gamma}$.