Corrigés de l'exercice 61 p. 334

1. **a.** Partant de $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$, grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$$

i.e. $3\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$. De plus, par hypothèse, $\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\overrightarrow{0}$ donc $3\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$. En utilisant à nouveau la relation de Chasles, on en déduit que $3(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DG_1})+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$ i.e. $4\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{DG_1}=\overrightarrow{0}$. Il s'ensuit que $4\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{G_1D}$ donc $\overrightarrow{GD}=\frac{3}{4}\overrightarrow{G_1D}$.

b. D'après la question précédente, les vecteurs $\overrightarrow{GD}$ et $\overrightarrow{G_1D}$ donc colinéaires donc les points G, G_1 et D sont alignés. En particulier, G appartient à la médiane (DG_1). De plus, $\overrightarrow{DG}=\frac{3}{4}\overrightarrow{DG_1}$ donc G se trouve aux trois-quart de $[DG_1]$ partant de D.

c. Le raisonnement est exactement le même pour les trois autres médianes.

2. **a.** Comme $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$, grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$$

donc $2\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+2\overrightarrow{GJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$. Or, I et J étant les milieux respectif de $[AB]$ et $[CD]$, $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$ donc $2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=0$ i.e. $\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{0}$.

Ainsi, G est le milieu de $[IJ]$.

b. En notant K, L, M et N les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AD]$, $[BD]$ et $[AC]$, on montre de même que G est le milieu de $[KL]$ et de $[MN]$ donc les trois bimédianes (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes au point G.