Corrigés des exercices 33 et 81 p. 29–36

Exercice 33 p. 29

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On sait que 15% des abonnés ne se réabonnent pas d'une année sur l'autre donc 85% des abonnés à l'année $2019 + n$ restent abonnés à l'année $2019 + (n + 1)$. De plus, à ceux-là, s'ajoutent 1800 nouveaux abonnés i.e 1,8 milliers de nouveaux abonnés donc $u_{n+1} = 0{,}85u_n + 1{,}8$.

2. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 12$ ».

Comme $u_0 = 8$ et $u_1 = 0{,}85 \times 8 + 1{,}8 = 8{,}6$, on a $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 12$ donc P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $u_k \leqslant u_{k+1} \leqslant 12$ donc, comme $0{,}85 > 0$, $0{,}85u_k \leqslant 0{,}85u_{k+1} \leqslant 0{,}85 \times 12$ et ainsi $0{,}85u_k + 1{,}8 \leqslant 0{,}85u_{k+1} + 1{,}8 \leqslant 0{,}85 \times 12 + 1{,}8$ i.e. $u_{k+1} \leqslant u_{k+2} \leqslant 12$. Ainsi, P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie. Autrement dit, on a montré que (u_n) est croissante et majorée par 12.

3.

```
U ← 8
A = 2019
Tant que U < 11
    U = 0,85U + 1,8
    A = A + 1
Renvoyer A
```

4.

```
def seuil(M):
   U=8
   A=2019
   while (U<11):
     U=0.85*U+1.8
     A=A+1
   return A
```

Exercice 81 p. 36

1. Remarque : la première ligne du code (`from math import sqrt`) sert à importer la fonction racine carrée (`sqrt`) à partir de la bibliothèque `math`.

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	$\frac{13}{2}$	$\sqrt{\frac{97}{2}}$	$\frac{13}{2}$	$\sqrt{\frac{97}{2}}$
2	$\frac{\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{97}{2}}}{2}$	$\frac{11\sqrt{6}}{4}$	$\frac{\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{97}{2}}}{2}$	$\frac{11\sqrt{6}}{4}$

Ainsi, l'instruction `exbac(4,9,2)` renvoie des valeurs approchées de $\frac{\frac{13}{2}+\sqrt{\frac{97}{2}}}{2}$ et $\frac{11\sqrt{6}}{4}$ i.e. `(6.73209706929603, 6.73609679265374)`.

2. a. Considérons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition P_n : « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ ».

Comme $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$, la proposition P_0 est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que P_k est vraie. Alors, $u_k > 0$ et $v_k > 0$ donc $\frac{u_k+v_k}{2} > 0$ i.e. $u_{k+1} > 0$. De plus, $u_k^2 > 0$ et $v_k^2 > 0$ donc $\frac{u_k^2+v_k^2}{2} > 0$ et ainsi $v_{k+1} > 0$. On en déduit que P_{k+1} est vraie.

On a donc montré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)^2 \\ &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - u_n^2 - 2u_n v_n - v_n^2}{4} \\ &= \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \left(\frac{u_n - v_n}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Si $n = 0$ alors $u_n = a < b = v_n$.

Supposons $n \geqslant 1$. Alors, d'après ce qui précède, $v_n^2 - u_n^2 = \left(\frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2}\right)^2 \geqslant 0$ donc $v_n^2 \geqslant u_n^2$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, on en déduit que $\sqrt{v_n^2} \geqslant \sqrt{u_n^2}$ i.e. $|v_n| \geqslant |u_n|$. Or, on a vu que u_n et v_n sont positifs donc on conclut que $v_n \geqslant u_n$.

Ainsi, dans tout les cas, $u_n \leqslant v_n$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2} \geqslant 0$$

car $u_n \leqslant v_n$.

Ainsi, (u_n) est croissante.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors,

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2 - 2v_n^2}{2} = \frac{u_n^2 - v_n^2}{2} \leqslant 0$$

car on a vu que $u_n^2 \leqslant v_n^2$. Ainsi, $v_{n+1}^2 \leqslant v_n^2$ donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0\,;+\infty[$, $\sqrt{v_{n+1}^2} \leqslant \sqrt{v_n^2}$ i.e. $|v_{n+1}| \leqslant |v_n|$ et donc, comme v_n et v_{n+1} sont positifs, $v_{n+1} \leqslant v_n$.

On conclut donc que (v_n) est croissante.