

Corrigés des exercices donnés pour le mardi 28 avril 2020

Exercice 1.

1. $I_1 = \int_1^e t \ln(t) dt.$

On pose $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto t$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \frac{t^2}{2}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1; e]$. On en déduit que

$$I_1 = \left[\ln(t) \times \frac{t^2}{2} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times \frac{t^2}{2} dt = \frac{e^2}{2} \ln(e) - \frac{1}{2} \ln(1) - \int_1^e \frac{t}{2} dt = \frac{e^2}{2} - \left[\frac{t^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} \right)$$

donc $\boxed{I_1 = \frac{e^2 + 1}{4}}.$

2. $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t) dt.$

On pose $u : t \mapsto t$ et $v' : t \mapsto \sin(t)$ de telle sorte que $u' : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto -\cos(t)$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_2 &= [t \times (-\cos(t))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times (-\cos(t)) dt \\ &= -\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0(-\cos(0)) + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt \\ &= [\sin(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_2 = 1}.$

3. $I_3 = \int_0^1 t^2 e^t dt.$

On pose $u : t \mapsto t^2$ et $v' : t \mapsto e^t$ de telle sorte que $u' : t \mapsto 2t$ et $v : t \mapsto e^t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; 1]$. On en déduit que

$$I_3 = [t^2 \times e^t]_0^1 - \int_0^1 2t \times e^t dt = e - 2 \int_0^1 te^t dt.$$

On calcule cette dernière intégrale par une nouvelle intégration par parties. On pose $u : t \mapsto t$ et $v' : t \mapsto e^t$ de telle sorte que $u' : t \mapsto 1$ et $v : t \mapsto e^t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; 1]$. On en déduit que

$$\int_0^1 te^t dt = [te^t]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^t dt = e - \int_0^1 e^t dt = e - [e^t]_0^1 = e - (e - 1) = 1$$

donc $\boxed{I_3 = e - 2}.$

4. $I_4 = \int_1^2 \ln(t) dt.$ On écrit $I_4 = \int_1^2 \ln(t) \times 1 dt$ et on pose $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1; 2]$. On en déduit que

$$I_4 = [\ln(t) \times t]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{t} \times t dt = 2 \ln(2) - \int_1^2 1 dt = 2 \ln(2) - 1 \times (2 - 1)$$

donc $\boxed{I_4 = 2 \ln(2) - 1}.$

5. $I_5 = \int_0^\pi (t-1) \sin(t) dt.$

On pose $u' : t \mapsto \sin(t)$ et $v : t \mapsto t-1$ de telle sorte que $u : t \mapsto -\cos(t)$ et $v : t \mapsto 1$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; \pi]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_5 &= [-\cos(t) \times (t-1)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(t) \times 1 dt \\ &= -\cos(\pi) \times (\pi-1) - (-\cos(0) \times (0-1)) + \int_0^\pi \cos(t) dt \\ &= \pi-1-1 + [\sin(t)]_0^\pi \\ &= \pi-2 + \sin(\pi) - \sin(0) \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_5 = \pi - 2}.$

6. $I_6 = \int_1^e t^{2020} \ln(t) dt.$

On pose $u : t \mapsto \ln(t)$ et $v' : t \mapsto t^{2020}$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $v : t \mapsto \frac{t^{2021}}{2021}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1; e]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_6 &= \left[\ln(t) \times \frac{t^{2021}}{2021} \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times \frac{t^{2021}}{2021} dt = \frac{e^{2021}}{2021} - \frac{1}{2021} \int_1^e t^{2020} dt \\ &= \frac{e^{2021}}{2021} - \frac{1}{2021} \left[\frac{t^{2021}}{2021} \right]_1^e = \frac{e^{2021}}{2021} - \left(\frac{e^{2021}}{2021^2} - \frac{1}{2021^2} \right) \\ &= \frac{2021e^{2021}}{2021^2} - \frac{e^{2021}}{2021^2} + \frac{1}{2021^2} \end{aligned}$$

donc $\boxed{I_6 = \frac{2020e^{2021} + 1}{4084441}}.$

7. $I_7 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) dt.$

Écrivons I_7 sous la forme $I_7 = \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) \times 1 dt$ et posons $u : t \mapsto \sin(\ln(t))$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto \frac{1}{t} \cos(\ln(t))$ et $v : t \mapsto t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1; e^\pi]$. On en déduit que

$$\begin{aligned} I_7 &= [\sin(\ln(t)) \times t]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} \frac{1}{t} \cos(\ln(t)) \times t dt \\ &= \sin(\ln(e^\pi)) \times e^\pi - \sin(\ln(1)) \times 1 - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(t)) dt \\ &= \sin(\pi) \times e^\pi - \sin(0) \times 1 - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(t)) dt \\ &= - \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(t)) dt \end{aligned}$$

Procédons à une seconde intégrations par parties pour calculer cette nouvelle intégrale. Posons $u : t \mapsto \cos(\ln(t))$ et $v' : t \mapsto 1$ de telle sorte que $u' : t \mapsto -\frac{1}{t} \sin(\ln(t))$ et $v : t \mapsto t$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[1; e^\pi]$. On en déduit

que

$$\begin{aligned}
 \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(t)) \, dt &= [\cos(\ln(t)) \times t]_1^{e^\pi} - \int_1^{e^\pi} -\frac{1}{t} \sin(\ln(t)) \times t \, dt \\
 &= \cos(\ln(e^\pi)) \times e^\pi - \cos(\ln(1)) \times 1 + \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t)) \, dt \\
 &= \cos(\pi)e^\pi - \cos(0) + I_7 \\
 &= -e^\pi - 1 + I_7
 \end{aligned}$$

Ainsi, $I_7 = -(-e^\pi - 1 + I_7)$ donc $2I_7 = e^\pi + 1$ et on conclut que $I_7 = \frac{e^\pi + 1}{2}$.

8. $I_8 = \int_0^1 t^3 e^{-t^2} \, dt.$

Écrivons I_8 sous la forme $I_8 = \int_0^1 \frac{1}{2} t^2 \times 2te^{-t^2} \, dt$ et posons $u : t \mapsto \frac{1}{2} t^2$ et $v' : t \mapsto 2te^{-t^2}$ de telle sorte que $u' : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto -e^{-t^2}$. Ainsi, u et v sont deux fonctions dérivables à dérivées continues sur $[0; 1]$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
 I_8 &= \left[-\frac{1}{2} t^2 e^{-t^2} \right]_0^1 - \int_0^1 t (-e^{-t^2}) \, dt \\
 &= -\frac{1}{2} e^{-1} - 0 + \int_0^1 te^{-t^2} \, dt \\
 &= -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^1 2te^{-t^2} \, dt \\
 &= -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} [-e^{-t^2}]_0^1 \\
 &= -\frac{e^{-1}}{2} + \frac{1}{2} (-e^{-1} - (-1))
 \end{aligned}$$

et ainsi $I_8 = \frac{1}{2} - e^{-1}$.

Exercice 2. 1. a. $u_0 + u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}} \, dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx = \int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx = \int_0^1 1 \, dx$
donc $u_0 + u_1 = 1$.

b. On a

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx = - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} \, dx \\
 &= - [\ln(1+e^{-x})]_0^1 = -\ln(1+e^{-1}) - (-\ln 2)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $u_1 = \ln 2 - \ln(1+e^{-1})$.

Comme $u_0 = 1 - u_1$, on en déduit que $u_0 = 1 - \ln 2 + \ln(1+e^{-1})$.

2. Pour tout entier naturel n et tout $x \in [0; 1]$, $\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale,

$u_n \geq 0$.

3. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1 + e^{-x}} dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x} + 1)}{1 + e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-nx} dx = \left[-\frac{e^{-nx}}{n} \right]_0^1 = -\frac{e^{-n}}{n} - \left(-\frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

donc $\boxed{u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}}.$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la question 2, $u_{n+1} \geq 0$ donc, étant donné que d'après la

question a, $u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n} - u_{n+1}$, on peut conclure que $\boxed{u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}}.$

4. On déduit des questions précédentes que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}$. Or, $\lim(-n) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc, par composition, $\lim e^{-n} = 0$ et, par somme, $\lim(1 - e^{-n}) = 1$. Par quotient, il s'ensuit que $\lim \frac{1 - e^{-n}}{n} = 0$. Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que $\boxed{\lim u_n = 0}.$