

Exercice 114 p. 251

a. Comme $\overrightarrow{AB}(-2; 1; 1)$, en prenant le point A(1; 2; 3) comme point de paramètre 0, on obtient la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \\ a = 3 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

d. Comme $\overrightarrow{AB}(-1; 0; 3)$, en prenant le point A(1; 0; 0) comme point de paramètre 0, on obtient la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 \\ a = 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 115 p. 251

1. On forme le système (S) $\begin{cases} -2 = 4 + 3t \\ -4 = -2 + t \\ 13 = 1 - 5t \end{cases}$. Or,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -6 = 3t \\ -2 = t \\ 12 = -5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \text{ (1)} \\ t = -\frac{12}{5} \text{ (2)} \end{cases}$$

et comme les équations (1) et (2) sont incompatibles, (S) n'a pas de solution. Ainsi, $A \notin (d)$.

2. Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}(3; 1; -5)$ (il est donné par les coefficients de t dans la représentation paramétrique) et $\overrightarrow{BC}(-12; -4; 20)$ donc $\overrightarrow{BC} = -4\vec{v}$. Ainsi, $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (BC) est parallèle à (d).

3. En prenant $\vec{v}$ comme vecteur directeur et B comme point de paramètre 0, on obtient la représentation paramétrique suivante pour (BC) : $\begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = 4 + s \\ z = 2 - 5s \end{cases}$ avec $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 117 p. 251

Comme (d) est parallèle à (BC), le vecteur $\overrightarrow{BC}(-6; 2; 4)$ est un vecteur directeur de (d). De plus, (d) passe par le point A(1; 2; -3) donc une représentation paramétrique de (d) est $\begin{cases} x = 1 - 6t \\ y = 2 + 2t \\ z = -3 + 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 119 p. 251

Un vecteur directeur de (d) est $\vec{v}(4; 1; -1)$ et un vecteur directeur de (d') est $\vec{v}'(2; 1; 3)$. Comme $x_{\vec{v}} \times y_{\vec{v}'} = 4 \times 1 = 4 \neq 2 = 2 \times 1 = x_{\vec{v}'} \times y_{\vec{v}}$, les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ ne sont pas colinéaires et ainsi (d) et (d') ne sont pas parallèles (au sens large). Elles sont donc soit sécantes soit non coplanaires.

Étudions $(d) \cap (d')$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 1 + 4k = 2t \\ -1 + k = 3 + t \\ 2 - k = -2 + 3t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4k = 2t \\ k = 4 + t \\ -k = -4 + 3t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + 4(4 + t) = 2t \\ k = 4 + t \\ -(4 + t) = -4 + 3t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 17 + 4t = 2t \\ k = 4 + t \\ -4 - t = -4 + 3t \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{17}{2} \text{ (1)} \\ k = 4 + t \\ t = 0 \text{ (3)} \end{cases} \end{aligned}$$

Les égalités (1) et (3) sont incompatibles donc le système n'a pas de solution. Ainsi, $(d) \cap (d') = \emptyset$ et on conclut que (d) et (d') sont non coplanaires.

Exercice 120 p. 251

- Montrons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. On a $\overrightarrow{AB} (1; 2; 3)$ et $\overrightarrow{AC} (3; 4; 5)$ donc $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = 1 \times 4 = 4 \neq 6 = 3 \times 2 = x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
- Le plan (ABC) passe par A(1; 1; 1) et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB} (1; 2; 3)$ et $\overrightarrow{AC} (3; 4; 5)$ donc une représentation paramétrique de (ABC) est
$$\begin{cases} x = 1 + k + 3k' \\ y = 1 + 2k + 4k' \\ z = 1 + 3k + 5k' \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R} \text{ et } k' \in \mathbb{R}.$$

Exercice 122 p. 252

- Le point A est obtenu en prenant $k = 0$ dans la représentation paramétrique de (d) : ses coordonnées sont donc (1; -5; -5). Pour décider si A appartient à $\mathcal{P}$, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 1 = 3 + t \\ -5 = -1 + 2t' \\ -5 = t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = -2 \\ -5 = t + t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t' = -2 \\ -5 = -4 \end{cases} \quad (3)$$

Comme l'égalité (3) est fausse, le système n'a pas de solution donc A n'appartient pas à $\mathcal{P}$.

- Pour démontrer que (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants, on montre que leur intersection est réduite à un seul point. Pour cela, on résout le système (S) suivant :

$$\begin{aligned} (S) \quad \begin{cases} 3 + t = 1 + 2k \\ -1 + 2t' = -5 + k \\ t + t' = -5 + 3k \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 + 2k \\ t' = -2 + \frac{1}{2}k \\ (-2 + 2k) + (-2 + \frac{1}{2}k) = -5 + 3k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 + 2k \\ t' = -2 + \frac{1}{2}k \\ -4 + \frac{5}{2}k = -5 + 3k \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 + 2k \\ t' = -2 + \frac{1}{2}k \\ -\frac{1}{2}k = -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 + 2 \times 2 \\ t' = -2 + \frac{1}{2} \times 2 \\ k = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t' = -1 \\ k = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, (S) possède une unique solution donc (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants. Plus précisément, les coordonnées du point d'intersection I de (d) et $\mathcal{O}$ s'obtiennent en prenant $k = 2$ dans la représentation paramétrique de (d), ce qui donne

$$\begin{cases} x_I = 1 + 2 \times 2 = 5 \\ y_I = -5 + 2 = -3 \\ z_I = -5 + 3 \times 2 = 1 \end{cases}$$

donc I(5; -3; 1). On peut vérifier en prenant $t = 2$ et $t' = -1$ dans la représentation paramétrique de $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x_I = 3 + 2 = 5 \\ y_I = -1 + 2 \times (-1) = -3 \\ z_I = 2 + (-1) = 1 \end{cases}$$

Exercice 124 p. 254

Comme $\overrightarrow{AB}(3; -2; -4)$, une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 3 - 2t \\ z = 2 - 4t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

De même, comme $\vec{i}(1; 0; 0)$ et $\vec{j}(0; 1; 0)$, une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par $O(0; 0; 0)$ et dirigé par $\vec{i}$ et $\vec{j}$ est $\begin{cases} x = 0 + 1 \times k + 0 \times k' \\ y = 0 + 0 \times k + 1 \times k' \\ z = 0 + 0 \times k + 0 \times k' \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} x = k \\ y = k' \\ z = 0 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$ et $k' \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer $(AB) \cap \mathcal{P}$, on résout le système (S) suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} -1 + 3t = k \\ 3 - 2t = k' \\ 2 - 4t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 3t = k \\ 3 - 2t = k' \\ 2 = 4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 3 \times \frac{1}{2} = k \\ 3 - 2 \times \frac{1}{2} = k' \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2} \\ k' = 2 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Comme (S) possède une unique solution, (d) et $\mathcal{P}$ sont sécants en un point I . Les coordonnées de I s'obtiennent en remplaçant t par $\frac{1}{2}$ dans la représentation paramétrique de (d) ou, ce qui pour une fois est plus simple, en remplaçant k et k' par $\frac{1}{2}$ et 2 dans celle de $\mathcal{P}$. Ainsi, $\boxed{I\left(\frac{1}{2}; 2; 0\right)}$.