

Exercice 101 p. 250

Pour montrer que les points A, B, C et D sont coplanaires, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

On a $\overrightarrow{AB} (3 - 1; 2 - 2; 6 - 3)$ i.e. $\overrightarrow{AB} (2; 0; 3)$, $\overrightarrow{AC} (1 - 1; 4 - 2; 2 - 3)$ i.e. $\overrightarrow{AC} (0; 2; -1)$ et $\overrightarrow{AD} (-1 - 1; 4 - 2; -1 - 3)$ i.e. $\overrightarrow{AD} (-2; 2; -4)$.

Comme $x_{\overrightarrow{AB}} \times y_{\overrightarrow{AC}} = 2 \times 2 = 4 \neq 0 = 0 \times 0 = x_{\overrightarrow{AC}} \times y_{\overrightarrow{AB}}$, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non colinéaires. Ainsi, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$. En coordonnées cela donne le système

$$(S) \begin{cases} -2 = a \times 2 + b \times 0 \\ 2 = a \times 0 + b \times 2 \\ -4 = a \times 3 + b \times (-1) \end{cases}$$

Or,

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2a \\ 2 = 2b \\ -4 = 3a - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ -4 = 3 \times (-1) - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \\ -4 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases}$$

(comme l'égalité $-4 = -4$ est vraie, on peut la supprimer du système). Ainsi, on obtient que $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires et ainsi les points A, B, C et D sont coplanaires.

Remarque. On a $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ donc le quadrilatère ABCD est même un parallélogramme.

Exercice 104 p. 251

1. On a

$$AB = \sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2 + (4 - 5)^2} = \sqrt{9 + 16 + 1} = \sqrt{26}$$

$$AC = \sqrt{(6 - 1)^2 + (2 - 2)^2 + (6 - 5)^2} = \sqrt{25 + 0 + 1} = \sqrt{26}$$

2. Ainsi, $AB = AC$ donc ABC est isocèle en A.

Exercice 106 p. 251

Pour montrer que ABCD est un losange, on montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, ce qui montre que ABCD est un parallélogramme puis on montre $AB = BC$, ce qui assure que le parallélogramme ABCD possède deux côtés consécutifs égaux et donc c'est un losange.

On a $\overrightarrow{AB} (10 - 3; 6 - 2; -1 - 1)$ i.e. $\overrightarrow{AB} (7; 4; -2)$ et $\overrightarrow{DC} (9 - 2; 8 - 4; -9 - (-7))$ i.e. $\overrightarrow{DC} (7; 4; -2)$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ donc ABCD est un parallélogramme.

De plus,

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{7^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{49 + 16 + 4} = \sqrt{69}$$

et

$$BC = \sqrt{(9 - 10)^2 + (8 - 6)^2 + (-9 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 4 + 64} = \sqrt{69}$$

donc $AB = BC$ et ainsi le parallélogramme ABCD est un losange.

Remarque. Une autre méthode possible consiste à calculer les longueurs des 4 côtés de ABCD et à montrer qu'ils sont tous égaux.