

Corrigés des exercices donnés pour le jeudi 23 avril 2020

Exercice 107 p. 183

1. Soit un réel $x > 1$. Alors, par stricte croissance de la fonction cube sur $\mathbb{R}$, $x^3 > 1^3$ i.e. $x^3 > 1$. En divisant par $x > 0$, il s'ensuit que $x^2 > \frac{1}{x}$.
2. Pour tout réel $x > 1$, $f(x) > g(x)$ d'après la question 1. De plus, $f(1) = g(1)$ donc, pour tout $x \in [1; e]$, $f(x) \geq g(x)$. Ainsi, l'aire entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[1; e]$ est, en u.a.,

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x) - g(x) dx = \int_1^e x^2 - \frac{1}{x} dx = \left[\frac{x^3}{3} - \ln(x) \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \ln(e) - \left(\frac{1}{3} - \ln(1) \right)$$

Or, $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$ donc $\mathcal{A} = \frac{e^3}{3} - 1 - \frac{1}{3}$ i.e. $\boxed{\mathcal{A} = \frac{e^3 - 4}{3}}$.

Exercice 109 p. 183

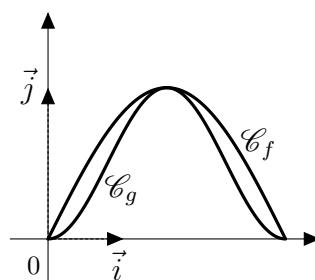
1. a. Par le cours, on sait que f est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
Ensuite, g est dérivable sur $[0; \pi]$ comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $x \in [0; \pi]$, $g'(x) = 2 \cos(x) \sin(x)$. Or, $\sin$ est positive sur $[0; \pi]$ donc $g'(x)$ est du signe de $\cos(x)$. Ainsi, $g'(x) \geq 0$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et $g'(x) \leq 0$ sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$. Ainsi, g est croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
- b. Soit $x \in [0; \pi]$. Alors,

$$f(x) - g(x) = \sin(x) - \sin^2(x) = \sin(x)[1 - \sin(x)].$$

Or, $\sin(x) \geq 0$ et $1 - \sin(x) \geq 0$ donc $f(x) - g(x) \geq 0$ i.e. $f(x) \geq g(x)$.

Ainsi, $\boxed{\text{sur } [0; \pi], \mathcal{C}_f \text{ est au-dessus de } \mathcal{C}_g}$.

- c. On a les courbes suivantes.



2. Comme $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[0; \pi]$, l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan comprise entre les deux courbes est

$$\mathcal{A} = \int_0^\pi f(x) - g(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) - \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \sin(x) dx - \int_0^\pi \sin^2(x) dx.$$

Or,

$$\int_0^\pi \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^\pi = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = -(-1) + 1 = 2$$

et, en utilisant les formules de linéarisation,

$$\int_0^\pi \sin^2(x) dx = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \int_0^\pi \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) dx = \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \cos(2x) \right]_0^\pi$$

donc

$$\int_0^\pi \sin^2(x) \, dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \cos(2\pi) - \left(\frac{0}{2} - \frac{1}{4} \cos(0) \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{A} = 2 - \frac{\pi}{2}$. Ici, l'unité d'aire est $(1\text{cm}) \times (2\text{cm}) = 2\text{cm}^2$ donc l'aire comprise entre l'aire deux courbes est $2 \times (2 - \frac{\pi}{2}) = 4 - \pi \text{ cm}^2$.

Exercice 114 p. 184

1. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit et composée de fonctions dérivables et, pour tout réel x ,

$$F'(x) = -1 \times e^{2-x} + (-x-1) \times (-e^{2-x}) = (-1 - (-x-1))e^{2-x} = xe^{2-x} = f(x)$$

donc $\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}}$.

2. La valeur moyenne de f sur $[0; 4]$ est

$$\mu = \frac{1}{4-0} \int_0^4 f(x) \, dx = \frac{1}{4} (F(4) - F(0)) = \frac{1}{4} (-5e^{-2} - (-1e^2))$$

i.e. $\boxed{\mu = \frac{e^2 - 5e^{-2}}{4}}$.

Exercice 152 p. 194. — NOTA BENE : il y a une erreur dans l'énoncé, la suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ et non pas pour tout $n \geq 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} \, dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_n^{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{-n + (n+1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)}$$

donc

$$\boxed{u_n = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} \, dx}.$$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, d'après la question 1,

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x^2} \, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx + \int_2^3 \frac{1}{x^2} \, dx + \cdots + \int_n^{n+1} \frac{1}{x^2} \, dx$$

donc, en utilisant $n-1$ fois la relation de Chasles, il vient

$$\boxed{S_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x^2} \, dx}.$$

- b. On en déduit que

$$S_n = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{n+1} = -\frac{1}{n+1} - \left(-\frac{1}{1} \right)$$

i.e.

$$\boxed{S_n = 1 - \frac{1}{n+1}}.$$

- c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on conclut que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0}$.