

Corrigés des exercices donnés pour le mardi 21 avril 2020

Exercice 53 p. 179

1. Considérons la fonction $F : x \mapsto \int_0^x \ln(t^2 + 1) dt$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors, pour tout réel x , $G(x) = F(3x)$ (autrement dit, $a = 3$ et $b = 0$).
2. a. Ainsi, G est de la forme $x \mapsto u(ax + b)$ avec $u = F$, $a = 3$ et $b = 0$. Par théorème, la fonction F est une primitive de $f : x \mapsto \ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x , $F'(x) = \ln(x^2 + 1)$. On en déduit que G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x , $G'(x) = 3F'(3x) = 3\ln(x^2 + 1)$.
b. Pour tout réel x , $x^2 + 1 \geq 0$ donc, par croissance de la fonction $\ln$, $\ln(x^2 + 1) \geq \ln(1) = 0$. Ainsi, pour tout réel x , $G'(x) \geq 0$ donc G est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 92 p. 182

1. On reconnaît presque une forme $\frac{u'}{u}$. Il manque seulement un 2 qu'on rajoute donc, en le compensant par un $\frac{1}{2}$:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{\frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}}_{\text{forme } \frac{u'}{u}} dx = \frac{1}{2} \left[\ln |1 + e^{2x}| \right]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln(1 + e^2) - \ln(1 + e^0)) = \frac{1}{2} (\ln(1 + e^2) - \ln(2))$$

i.e. finalement $\boxed{I = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + e^2}{2} \right)}$.

Par ailleurs, par linéarité de l'intégrale,

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} dx + \int_0^1 \frac{1}{1 + e^{2x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}} + \frac{1}{1 + e^{2x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{1 + e^{2x}} dx = \int_0^1 1 dx$$

donc $\boxed{I + J = 1 \times (1 - 0) = 1}$.

2. Comme $J = I + J - I$, on conclut que $\boxed{J = 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + e^2}{2} \right)}$.

Exercice 93 p. 182

1. On reconnaît presque une forme $\frac{u'}{u}$. Il manque seulement un 2 qu'on rajoute donc, en le compensant par un $\frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{2 \cos(x)}{1 + 2 \sin(x)}}_{\text{forme } \frac{u'}{u}} dx = \frac{1}{2} [\ln |1 + 2 \sin(x)|]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left(\ln \left(1 + 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} \right) \right) - \ln(1 + 2 \sin(0)) \right) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(3) - \ln(1)) \end{aligned}$$

i.e. finalement $\boxed{I = \frac{1}{2} \ln(3)}$.

2. Par linéarité de l'intégrale,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{1 + 2 \sin(x)} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2x)}{1 + 2 \sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) + \sin(2x)}{1 + 2 \sin(x)} dx$$

Or, grâce aux formules de duplication, pour tout réel x , $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ donc, en factorisant par $\cos(x)$, $\cos(x) + \sin(2x) = \cos(x) [1 + 2 \sin(x)]$. Dès lors,

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x) [1 + 2 \sin(x)]}{1 + 2 \sin(x)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)$$

donc $\boxed{I + J = 1}$.

3. Comme $J = I + J - I$, on conclut que $\boxed{J = 1 - \frac{1}{2} \ln(3)}$.

Exercice 94 p. 182

1. a. Soit $x \in [0; 1]$. Alors, $x \leq 1$ donc, en multipliant par $x \geq 0$, on obtient $x^2 \leq x$. Dès lors, $-x^2 \geq -x$ et donc, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$, $e^{-x^2} \geq e^{-x}$.
- b. Soit $x \in [0; 1]$. Comme la fonction exponentielle est à valeurs positives, on en déduit que $0 \leq e^{-x} \leq e^{-x^2}$. En multipliant par $x \geq 0$, on aboutit à l'encadrement : $0 \leq xe^{-x} \leq xe^{-x^2}$.
2. Par positivité et croissance de l'intégrale, on en déduit que $0 \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \int_0^1 xe^{-x^2} dx$.
Or,

$$\int_0^1 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \underbrace{(-2x)e^{-x^2}}_{\text{forme } u'e^u} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^1 = -\frac{1}{2} (e^{-1} - e^0) = \frac{1 - e^{-1}}{2}$$

On conclut donc que $\boxed{0 \leq \int_0^1 xe^{-x} dx \leq \frac{1 - e^{-1}}{2}}$.

Exercice 98 p. 182

1. Soit un réel $t \geq 1$. Alors, par croissance de la fonction carré sur $[0; +\infty[$, $t^2 \geq 1^2 = 1$ donc $t^2 \leq t^2 + 1 \leq t^2 + t^2 = 2t^2$. Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, on a en déduit que $\sqrt{t^2} \leq \sqrt{t^2 + 1} \leq \sqrt{2t^2}$. Or, comme $t \geq 0$, $\sqrt{t^2} = t$ et $\sqrt{2t^2} = t\sqrt{2}$ donc $\boxed{t \leq \sqrt{t^2 + 1} \leq t\sqrt{2}}$. (On se demande bien pourquoi l'énoncé à conserver le $\sqrt{t^2}$ à gauche dans l'inégalité!)
2. Par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on en déduit que $\frac{1}{t\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \leq \frac{1}{t}$ et donc, par croissance de l'intégrale (puisque $x < 2x$ car $x > 0$),

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{2}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \leq \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$$

Or,

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln(x) = \ln\left(\frac{2x}{x}\right) = \ln(2)$$

et, comme $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est une constante,

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t\sqrt{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(2)$$

donc on a abouti à $\boxed{\frac{\ln(2)}{\sqrt{2}} \leq \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} dt \leq \ln(2)}$.

Exercice 101 p. 183

1. Le discriminant du trinôme $1 + x + x^2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$ donc ce trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction rationnelle f_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Dès lors, la suite (I_n) est bien définie.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors, par linéarité de l'intégrale,

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x+x^2} - \frac{x^n}{1+x+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} dx.$$

Or, pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \geq 0$, $1+x+x^2 > 0$ (car $\Delta > 0$ et $a = 1 > 0$) et $x-1 \leq 0$ donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x+x^2} \leq 0$. Or, l'intégrale d'une fonction négative sur $[0; 1]$ est négative (car $0 < 1$) donc $I_{n+1} - I_n \leq 0$. Ainsi, (I_n) est décroissante.

3. **Méthode.** Pour encadrer I_n , on va encadrer f_n sur $[0; 1]$. Il faut cependant « bien » s'y prendre. Pour cela, remarquons que l'encadrement de I_n dépend de n donc on n'a pas intérêt à faire disparaître les n de l'encadrement de f_n . Ainsi, encadrer x par 0 et 1 puis encadrer x^n par 0 et 1 serait une mauvaise idée. On va donc plutôt encadrer le dénominateur.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0; 1]$. Alors, $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq x^2 \leq 1$ donc $1 \leq 1+x+x^2 \leq 3$. Dès lors, par décroissance de la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+x+x^2} \leq \frac{1}{1} = 1$. En multipliant par $x^n \geq 0$, on en déduit que $\frac{x^n}{3} \leq f_n(x) \leq x^n$.

Dès lors, par croissance de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{x^n}{3} dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$.

Or, $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}$ et, comme $\frac{1}{3}$ est une constante, par linéarité, $\int_0^1 \frac{x^n}{3} dx = \frac{1}{3} \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{3(n+1)}$.

On conclut donc que $\frac{1}{3(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

4. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3(n+1)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on conclut, grâce au théorème d'encadrement, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.