

Exercice 23 p. 245

Par définition, comme O est l'origine du repère, les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ sont les même que celles de A donc $\overrightarrow{OA} (4; -1; 5)$.

Exercice 24 p. 245

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(7 - (-5); 1 - 3; -4 - 2)$ i.e. $\overrightarrow{AB} (12; -2; -6)$.

Exercice 94 p. 250

Pour étudier l'alignement des points A, B et C, on étudie l'alignement des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (par exemple).

Or, $\overrightarrow{AB} (1 - (-2); 3 - (-1); 5 - 6)$ i.e. $\overrightarrow{AB} (3; 4; -1)$ et $\overrightarrow{AC} (13 - (-2); 19 - (-1); 1 - 6)$ i.e. $\overrightarrow{AC} (15; 20; -5)$. On constate que $\overrightarrow{AC} = 5\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et ainsi les points A, B et C sont alignés.

Exercice 98 p. 250

1. Commençons par calculer les coordonnées des points I. On a $I\left(\frac{1+4}{2}; \frac{2+(-5)}{2}; \frac{3+6}{2}\right)$ i.e. $I\left(\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

Le quadrilatère IACE est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CE}$.

Or, $\overrightarrow{AI} \left(\frac{5}{2} - 1; -\frac{3}{2} - 2; \frac{9}{2} - 3\right)$ i.e. $\overrightarrow{AI} \left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; \frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{CE} (x_E - 0; y_E - 0; z_E - 3)$ i.e. $\overrightarrow{CE} (x_E; y_E; z_E - 3)$.
Dès lors, IACE est un parallélogramme si et seulement si

$$\begin{cases} x_E = \frac{3}{2} \\ y_E = -\frac{7}{2} \\ z_E - 3 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_E = \frac{3}{2} \\ y_E = -\frac{7}{2} \\ z_E = \frac{9}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $E\left(\frac{3}{2}; -\frac{7}{2}; \frac{9}{2}\right)$.

De même, le quadrilatère IBDF est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DF}$.

Or, $\overrightarrow{BI} \left(\frac{5}{2} - 4; -\frac{3}{2} - (-5); \frac{9}{2} - 6\right)$ i.e. $\overrightarrow{BI} \left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ et $\overrightarrow{DF} (x_F - 7; y_F - 8; z_F - (-9))$ i.e. $\overrightarrow{DF} (x_F - 7; y_F - 8; z_F + 9)$. Dès lors, IBDF est un parallélogramme si et seulement si

$$\begin{cases} x_F - 7 = -\frac{3}{2} \\ y_F - 8 = \frac{7}{2} \\ z_F + 9 = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x_F = \frac{11}{2} \\ y_F = \frac{23}{2} \\ z_F = -\frac{21}{2} \end{cases}$$

Ainsi, $F\left(\frac{11}{2}; \frac{23}{2}; -\frac{21}{2}\right)$.

Remarque. — Les coordonnées de $\overrightarrow{BI}$ sont les opposées des coordonnées de $\overrightarrow{AI}$. Ceci était prévisible puisque I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{BI}$.

2. Les coordonnées de J sont $\left(\frac{0+7}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{-9+3}{2}\right)$ i.e. $J\left(\frac{7}{2}; 4; -3\right)$.

Les coordonnées du milieu de [EF] sont $\left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{11}{2}}{2}; \frac{-\frac{7}{2} + \frac{23}{2}}{2}; \frac{\frac{9}{2} - \frac{21}{2}}{2}\right)$ i.e. $\left(\frac{7}{2}; 4; -3\right)$ donc J est bien le milieu de [EF].

Remarque. — Le résultat de la question 2 est un fait général (indépendant des points particuliers choisis). En effet, par la relation de Chasles, $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CJ}$. Or, comme IACE est un parallélogramme, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{IA}$ et, comme J est le milieu de [CD], $\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{JD}$ donc $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{JD}$. De plus, I est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BI}$ et IBDF est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{DF}$ donc $\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{DF}$. Ainsi, $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{JD} = \overrightarrow{JD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{JF}$ ce qui permet de conclure que J est le milieu de [EF].