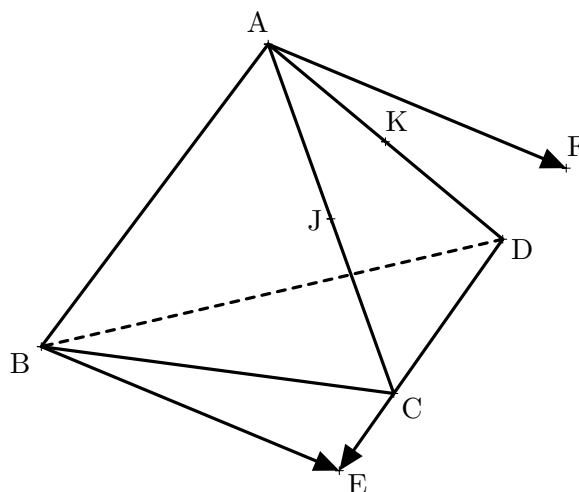


Exercice 20 p. 245

- On sait que $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AC}$ donc, grâce à la relation de Chasles, $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$ et donc $\boxed{\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}$.
- Par définition, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ et donc, grâce à la question précédente, $\boxed{\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AD}}$.
- Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires donc $\boxed{\text{les points A, M, N et D sont coplanaires}}$.

Exercice 83 p. 249



- (Question très important. À savoir refaire)

On écrit, grâce à la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD}$$

et, comme K est le milieu de [AD], $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$. Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BK}}$.

- Grâce à la relation de Chasles à la question précédente,

$$\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{BD}$$

Or, par hypothèse, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BE}$ donc

$$\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BE} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DE}$$

Or, par hypothèse, on sait que $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} = 3(\frac{1}{2}\overrightarrow{DC})$.

Pour aboutir au résultat, il suffit donc de montrer que $\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{KJ}$. Pour cela, on utilise la relation de Chasles et le fait que J et K sont les milieux respectifs de [AC] et [AD] :

$$\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}.$$

Ainsi, on conclut que $\boxed{\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{KJ}}$.

- D'après la question précédente, $\overrightarrow{BF} - 2\overrightarrow{BK} = 3\overrightarrow{KJ} = 3(\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BJ}) = -3\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{BJ}$. Ainsi, $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{BK} + 3\overrightarrow{BJ}$ donc les vecteurs $\boxed{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BK} \text{ et } \overrightarrow{KJ}}$ sont colinéaires.
- On peut donc conclure que $\boxed{\text{les points B, K, J et F sont coplanaires}}$.

Exercice 89 p. 250

1. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ}$. Or,

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH} = -\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{EH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EH} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH}$$

donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GJ}$. Mais, comme EFGH est un parallélogramme, $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$ et, par hypothèse, $\overrightarrow{GJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GF}$ donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{GF} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{GF}$ et finalement $\boxed{\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HG}}$.

2. Montrons que $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{AI}$. Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{KD} + \overrightarrow{DH}$. De plus,

$$\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AD} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

et, comme ADHE est un parallélogramme, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$ donc $\overrightarrow{KD} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EI}$. De plus, comme ADHE est un parallélogramme, $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ donc $\overrightarrow{KH} = \overrightarrow{EI} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$. Ainsi, comme $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{KH}$, la base $(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{AI})$ du plan (AIJ) est égale à la base $(\overrightarrow{HG}, \overrightarrow{KH})$ de (KHG) donc, par théorème, $\boxed{(\text{AIJ}) \text{ et } (\text{KHG}) \text{ sont parallèles}}$.

Exercice 90 p. 250

1. On a $\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$ donc $\boxed{\overrightarrow{HI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}}$.

Ensuite, d'après la règle du parallélogramme, $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$ donc $\boxed{\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}$.

Enfin, $\overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{FG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FG} - \frac{3}{4}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ donc $\overrightarrow{KD} = \overrightarrow{FJ}$. $\overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AE}$ donc, comme $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, $\boxed{\overrightarrow{GJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}}$.

2. Soit x et y deux réels. Alors,

$$x\overrightarrow{EG} + y\overrightarrow{GJ} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + y\left(-\frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE}\right) = x\overrightarrow{AB} + \left(x - \frac{1}{3}y\right)\overrightarrow{AD} - y\overrightarrow{AE}.$$

Or, $\overrightarrow{HI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}$ donc on remarque que $x = \frac{1}{3}$ et $y = 1$ conviennent car alors $x - \frac{1}{3}y = 0$. Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{HI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GJ}}$.

3. On déduit du résultat précédent que les vecteurs $\overrightarrow{HI}$, $\overrightarrow{EG}$ et $\overrightarrow{GJ}$ sont coplanaires donc la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ) (propriété 28 du cours).

ATTENTION! On ne peut pas dire que (HI) est incluse dans (EGJ) mais seulement qu'elle est parallèle à ce plan.