

# ◆ Chapitre 1 : Généralités sur les suites réelles

## I. — Variations d'une suite

### Définition 1

Soit  $N$  un entier naturel et  $(u_n)$  une suite réelle définie (au moins) à partir du rang  $N$ . On dit que :

- $(u_n)$  est **croissante** à partir du rang  $N$  si .....
- $(u_n)$  est **décroissante** à partir du rang  $N$  si .....
- $(u_n)$  est **constante** à partir du rang  $N$  si .....
- $(u_n)$  est **monotone** à partir du rang  $N$  si .....

 *Remarques.* — 1) Il existe des suites qui ne sont pas monotones. Par exemple, la suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n = (-1)^n$  qui est telle que .....

2) Si, dans la définition 1, les inégalités sont strictes, on parle de suite strictement croissante ou strictement décroissante.

Pour étudier les variations d'une suite  $(u_n)$ , on dispose de plusieurs « méthodes » :

➤ MÉTHODE n°1 : Comparer directement  $u_n$  et  $u_{n+1}$

**Exemple 2.** — Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \frac{1}{2n+1}$ .

➤ MÉTHODE n°2 : Étudier le signe de  $u_{n+1} - u_n$

**Exemple 3.** — Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = n^2 - 5n + 1$ .

➤ MÉTHODE n°3 : Si la suite  $(u_n)$  est à termes strictement positifs, comparer  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et 1

**Exemple 4.** — Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \frac{5^n}{7^n}$ .

➤ MÉTHODE n°4 : Si  $u_n$  est de la forme  $u_n = f(n)$  pour tout  $n$ , étudier les variations de  $f$

**Exemple 5.** — Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_n = \frac{n-3}{2n+1}$ .

➤ MÉTHODE n°5 : Utiliser un raisonnement par récurrence

**Exemple 6.** — Étudier les variations de la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 3$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $u_{n+1} = 0,3u_n + 1$ .

 *Remarques.* — 1) Plusieurs méthodes peuvent fonctionner pour une même suite. Le premier exemple peut tout aussi bien s'étudier avec la méthode n°2 ou la méthode n°4.

2) La méthode n°2 est celle qu'on utilise le plus souvent.

3) La méthode n°3 peut aussi s'appliquer pour des suites à valeurs strictement négatives mais il faut bien prendre garde à changer le sens de l'inégalité au moment de multiplier par  $u_n$ . Elle s'appliquera plus particulièrement aux suites faisant intervenir des produits (notamment des nombres à la puissance  $n$ ). Dans tous les cas, **elle ne s'applique pas aux suites dont les termes changent de signe !**

4) La méthode n°4 n'admet pas de réciproque. Les variations de  $(u_n)$  définie par  $u_n = f(n)$  ne permettent pas de déterminer celles de la fonction  $f$ .

## II. — Suites majorées, minorées, bornées

### Définition 7

Soit  $N$  un entier naturel et  $(u_n)$  une suite réelle définie à partir du rang  $N$ . On dit que :

- $(u_n)$  est **majorée** .....  
On dit alors que .....
- $(u_n)$  est **minorée** .....  
On dit alors que .....
- $(u_n)$  est **bornée** .....  
.....

### Exemples importants à connaître

**Exemple 8.** — Démontrer que les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies, pour tout entier naturel  $n$ , par  $u_n = \cos(n)$  et  $v_n = (-1)^n$  sont bornées.

**Exemple 9.** — Démontrer que la suite  $(w_n)$  définie pour tout entier  $n \geq 1$  par  $w_n = 1 + \frac{1}{n}$  est bornée.

**Exemple 10.** — Démontrer que toute suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée).

## III. — Un exemple d'étude de suite définie par une relation de récurrence

1. On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; 2]$  par  $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ . On note  $\Delta$  la droite d'équation  $y = x$  et  $\mathcal{C}$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé. Ces deux courbes sont tracées ci-dessous. Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $[0; 2]$  et dresser son tableau de variation.
2. On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{4}$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  c'est-à-dire  $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$ .
  - a. Calculer  $u_1$ ,  $u_2$  et  $u_3$ . On donnera les valeurs sous forme de fractions irréductibles.
  - b. Sur la figure ci-dessous, placer  $u_0$  sur l'axe des abscisses et construire  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  et  $u_4$  sur cet axe.
  - c. Démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$ .  
Quel est le sens de variation de la suite  $(u_n)$  ?

