

◆ Chapitre 0 : Le raisonnement par récurrence

I. — Principe du raisonnement par récurrence

On souhaite démontrer qu'une certaine propriété P_n dépendant d'un entier naturel n est vraie pour toute valeur (entière) de n . Pour cela, il suffit de :

- montrer que la propriété est vraie au rang 0 i.e. que lorsqu'on remplace n par 0 dans P_n alors on obtient une propriété qui est vraie. Cette étape est appelée *initialisation de la récurrence*.
- supposer que la propriété P_k est vraie **pour un certain** entier k : c'est ce qu'on appelle *l'hypothèse de récurrence*.
- montrer que sous cette hypothèse (P_k est vraie), la propriété P_{k+1} est également vraie : c'est ce qu'on appelle *l'hérédité* de la propriété P_n .

Remarques

1. Il arrivera qu'on souhaite montrer que la propriété P_n n'est vraie qu'à partir d'un certain rang N . Dans ce cas, dans l'étape d'initialisation, on remplace 0 par N .
2. Le principe de raisonnement par récurrence est ce qu'on appelle un axiome, c'est-à-dire une « vérité première » qui sert de base à la théorie et qu'on admet sans chercher à la démontrer, la considérant comme évidente.

II. — Exemples d'application

Exemple 1. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exemple 2 [Exercice 3 a) de la fiche **Révision sur les suites réelles**]

Soit la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \end{cases}$$

Conjecturer et démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n .

Exemple 3. — Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $n^2 \leq 2^n$.

III. — Exercices

Exercice 1. — Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{1+v_n}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
2. On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{1}{v_n}$.
 - a. Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique.
 - b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n puis celle de v_n en fonction de n .

Exercice 2. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Démontrer par récurrence que $u_n = 3 - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.
 - a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
 - b. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n puis retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 3. — Si n est un entier naturel non nul, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$.

1. Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_{n+1} en fonction de S_n .
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4. — Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n dans les exemples b) et c) de l'exercice 3 de la fiche **Révision sur les suites réelles**.

Exercice 5. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs i.e.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = \sum_{k=1}^n (2k - 1).$$

1.
 - a. Calculer S_1 , S_2 , S_3 et S_4 . Quelle conjecture peut-on faire ?
 - b. Démontrer la conjecture précédente par récurrence.
2. En utilisant une suite arithmétique, retrouver directement le résultat de la question 1.b.
3. Comment peut-on visualiser la propriété démontrée dans les questions 1.b. et 2 ?

Exercice 6. — Si n est un entier naturel non nul, on note $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. La notation $n!$ se lit *factorielle n*.

On a donc $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, etc.

Démontrer que, pour tout entier $n \geq 4$, $n! > 2^n$.

Exercice 7. — Soit $a \in]0; 1[$. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Exercice 8. — Reprendre l'exercice 8 avec la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in]0; 1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.