

♦ Chapitre 7. — Positions relatives de droites et de plans de l'espace

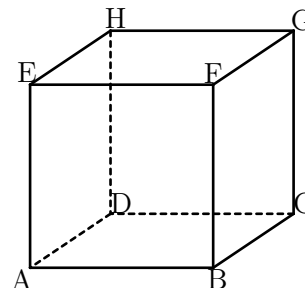
I. — Positions relatives de deux droites

Définition 1

On dit que deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de l'espace sont **coplanaires** s'il existe un plan $\mathcal{P}$ contenant ces deux droites. Dans le cas contraire, on dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **non coplanaires**.

Exemple 2. — Sur la figure ci-contre,

- les droites (AB) et (BC) sont
- les droites (AB) et (CD) sont
- les droites (AB) et (EF) sont
- les droites (AB) et (HG) sont
- les droites (AB) et (FB) sont
- les droites (AB) et (CG) sont



Définition 3

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace.

1. On dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **sécantes** si elles ont un point commun et un seul.
2. On dit que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont **parallèles** si :
 - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont coplanaires et
 - $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ n'ont pas de point commun ou $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont confondues.

Exemple 4. — En reprenant la figure de l'exemple 2, citer toutes les droites parallèles à (AB).

Propriété 5

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites de l'espace. Alors, on est dans l'un des quatre cas suivants :

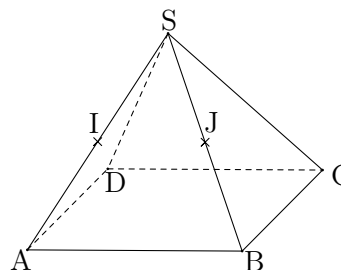
coplanaires		non coplanaires
sécantes	parallèles	
	strictement	confondues

Remarque 6. — Il y a donc dans l'espace un cas de plus que dans le plan : le cas des droites non coplanaires qui ne sont ni parallèles ni sécantes.

Théorème 7

Si deux droites de l'espace sont parallèles à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles.

Exemple 8. — On considère une pyramide SABCD dont la base ABCD est un carré. On note I et J les milieux respectifs de [SA] et [SB]. Démontrer que (IJ) est parallèle à (CD).



II. — Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition 9

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. On dit que :

1. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont **parallèles** s'ils n'ont pas de point commun ou si $\mathcal{D}$ est incluse dans $\mathcal{P}$;
2. $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont **sécants** s'ils ont un point commun et un seul.

Propriété 10

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Alors, on est dans l'un des trois cas suivants :

parallèles		sécants
strictement	$\mathcal{D}$ contenue dans $\mathcal{P}$	

Théorème 11

Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace. Si $\mathcal{D}$ est parallèle à une droite $\mathcal{D}'$ incluse dans le plan $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

Exemple 12. — En reprenant la figure de l'exemple 8, démontrer que la droite (IJ) est parallèle au plan (SCD).

III. — Positions relatives de deux plans de l'espace

Définition 13

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace. On dit que :

1. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont **parallèles** si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ n'ont pas de point commun ou si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont confondus ;
2. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont **sécants** si leur intersection est une droite.

Propriété 14

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace. Alors, on est dans l'un des trois cas suivants :

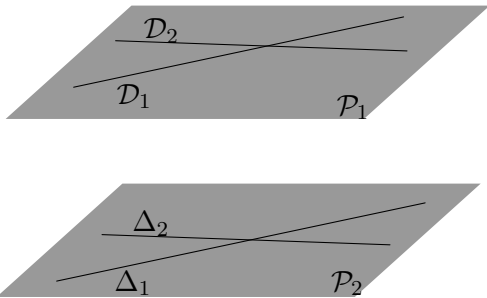
parallèles		sécants
strictement	confondus	

Théorème 15

Si deux plans de l'espace sont parallèles à un même troisième alors ils sont parallèles entre eux.

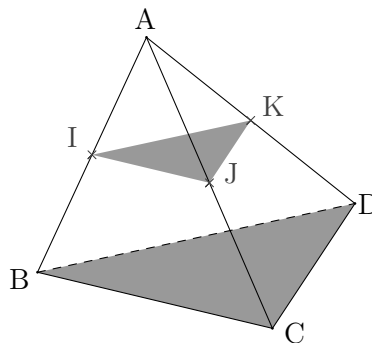
Théorème 16

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace. On suppose qu'il existe deux droites sécantes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ du plan $\mathcal{P}_1$ et deux droites sécantes Δ_1 et Δ_2 du plan $\mathcal{P}_2$ telles que $\mathcal{D}_1$ est parallèle à Δ_1 et $\mathcal{D}_2$ est parallèle à Δ_2 . Alors, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.



Remarque 17. — Il est équivalent de prendre comme hypothèse que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont deux droites sécantes du plan $\mathcal{P}_1$ tous deux parallèles au plan $\mathcal{P}_2$.

Exemple 18. — On considère le tétraèdre ABCD de la figure ci-contre. On note I, J et K les milieux respectifs de $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$. Démontrer que les plans (BCD) et (IJK) sont parallèles.

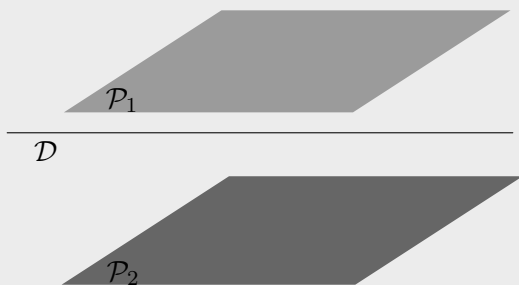


IV. — Parallélisme entre plans et droites

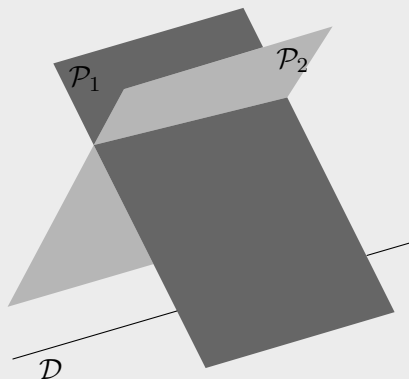
Propriété 19

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans et $\mathcal{D}$ une droite de l'espace.

a) Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles et si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ alors $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

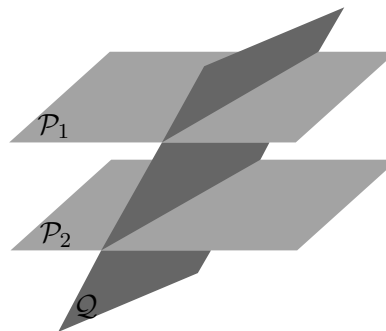


b) (théorème du toit) Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ et si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}_1$ et à $\mathcal{P}_2$ alors $\mathcal{D}$ est parallèle à Δ .



Propriété 20

Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles. Alors, tout plan $\mathcal{Q}$ sécant avec $\mathcal{P}_1$ est également sécant avec $\mathcal{P}_2$ et les deux droites $\mathcal{D}_1 = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{Q}$ et $\mathcal{D}_2 = \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{Q}$ sont parallèles.



Exemple 21. — En reprenant la figure de l'exemple 18, on note L un point de $[IJ]$ et M l'intersection de (AL) avec $[BC]$. Démontrer que les droites (KL) et (DM) sont parallèles.

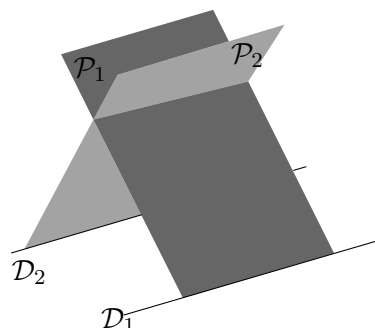
Théorème 22 (Théorème du toit, v. 2)

Soit $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites parallèles de l'espace.

On suppose que :

1. $\mathcal{P}_1$ est un plan contenant $\mathcal{D}_1$,
2. $\mathcal{P}_2$ est un plan contenant $\mathcal{D}_2$,
3. $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ .

Alors, Δ est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et à $\mathcal{D}_2$



Exemple 23. — On considère un tétraèdre ABCD. On note I le milieu de [AB], J le milieu de [AC] et K le point de [AD] tel que $AK = \frac{1}{4}AD$. Montrer que les plans (BCD) et (IJK) sont sécants selon une droite Δ parallèle à la droite (BC).

V. — Orthogonalité dans l'espace

Définition 24

1. On dit que deux droites de l'espace sont **perpendiculaires** si elles sont coplanaires et si, dans le plan qui les contient, elles sont perpendiculaires.
2. On dit que deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de l'espace sont **orthogonales** s'il existe une droite Δ qui est parallèle à $\mathcal{D}_1$ et perpendiculaire à $\mathcal{D}_2$. On note alors $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$.

Exemple 25. — On reprend le cube de l'exemple 2. Citer toutes les droites portées par des arêtes du cube qui sont perpendiculaires à (AB) puis toutes les droites portées par des arêtes du cube qui sont orthogonales à (AB).

Remarque 26. — Si deux droites orthogonales sont coplanaires alors elles sont perpendiculaires.

Propriété 27

Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.



Dans l'espace, deux droites orthogonales à une même troisième ne sont pas nécessairement parallèles... et elles peuvent même être orthogonales entre elles !

Définition 28

On dit qu'une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est **orthogonale** (ou **perpendiculaire**) à un plan $\mathcal{P}$ si $\mathcal{D}$ est orthogonale à toute droite incluse dans $\mathcal{P}$. On note alors $\mathcal{D} \perp \mathcal{P}$.

Théorème 29

Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Exemple 30. — On considère le prisme droit ABCDEF représenté ci-contre.

Démontrer que les droites (BE) et (DF) sont orthogonales.

