

◆ Chapitre 3 : Comportement asymptotique d'une suite réelle

1 Définitions

1.1 Suites convergentes

Définition 1

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) **converge** (ou est convergente) s'il existe un réel ℓ tel que tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang.

Remarque 2. — Dans la pratique, on peut se contenter de considérer un intervalle I de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ où r est un réel strictement positif.

Exemple 3. — Démontrer, en utilisant la définition, que la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ converge.

Théorème et définition 4

Si une suite réelle (u_n) converge vers un réel ℓ alors ce nombre est unique et est appelé la **limite** de (u_n) . On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ ou encore $\lim u_n = \ell$.

Remarque 5 (IMPORTANT). — Si $\lim u_n = \ell$ alors $\lim u_{n+1} = \ell$.

1.2 Suites divergentes

Définition 6

On dit qu'une suite **diverge** (ou est divergente) si elle ne converge pas.

Exemple 7. — Démontrer que la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$ diverge.

Définition 8

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) tend (ou diverge) vers $+\infty$ si, pour tout réel A positif, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang i.e. s'il existe un entier N (dépendant de A) tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \geq A$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ ou encore $\lim u_n = +\infty$.
- (u_n) tend (ou diverge) vers $-\infty$ si, pour tout réel B négatif, l'intervalle $]-\infty; B[$ contient toutes les valeurs de la suite à partir d'un certain rang i.e. s'il existe un entier N (dépendant de B) tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq B$. On note alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ ou encore $\lim u_n = -\infty$.

Exemple 9. — Démontrer, en utilisant la définition, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$.

Remarque 10. — Il ne faut pas confondre *avoir une limite* et *converger*. Les suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$ ont une limite mais elles sont divergentes car cette limite est infinie. **Converger, c'est avoir une limite réelle donc finie.**

2 Théorèmes sur les limites

2.1 Limites de référence

Théorème 11. — (admis)

1. Si a est un réel alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a = a$.
2. Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^k) = -\infty$.
3. Pour tout entier $k \geq 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^k} = 0$.
4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

2.2 Opérations sur les limites

Dans tous les tableaux suivants, (u_n) et (v_n) sont des suites réelles et ℓ et ℓ' sont des réels.

1. Limite d'une somme

si (u_n) tend vers	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ tend vers						

L'étude de $(u_n - v_n)$ se ramène à celle d'une somme en écrivant que $u_n - v_n = u_n + (-v_n)$

2. Limite d'un produit

si (u_n) tend vers	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
et si (v_n) tend vers	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $(u_n v_n)$ tend vers									

Les suites du type (kv_n) où k est un réel sont des cas particuliers de ce qui précède en prenant pour (u_n) la suite constante égale à k .

3. Limite d'un quotient

- Cas où (v_n) ne tend pas vers 0

si (u_n) tend vers	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
et si (v_n) tend vers	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers							

- Cas où (v_n) tend vers 0

si (u_n) tend vers	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell > 0$	$+\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	$\ell < 0$	$-\infty$	0
et si (v_n) tend vers	0^+	0^+	0^-	0^-	0^+	0^+	0^-	0^-	0
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ tend vers									

2.3 Quelques règles et techniques utiles

Propriété 12. — Règle opératoire sur les polynômes

La limite d'un polynôme en $+\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.

Exemple 13. — Déterminer $\lim(-2n^3 + 4n^2 + 2n - 5)$.

Propriété 14. — Règle opératoire sur les fractions rationnelles

La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus hauts degrés.

Exemple 15. — Déterminer $\lim \frac{3n^4 - 5n^3 + 2n}{1 - n^2 + 6n^4}$.

Remarque 16. — Pour lever une indétermination dans une expression du type $u_n = \sqrt{A_n} - \sqrt{B_n}$, il est en général efficace de multiplier et de diviser u_n par la *quantité conjuguée* $\sqrt{A_n} + \sqrt{B_n}$.

Exemple 17. — Déterminer $\lim(\sqrt{n^2 + 2} - \sqrt{n^2 + 1})$.

3 Limites et ordre

3.1 Comparaisons

Théorème 18

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, pour tout n (à partir d'un certain rang), $u_n \leq v_n$. On suppose, de plus, que (u_n) converge vers ℓ et que (v_n) converge vers ℓ' . Alors, $\ell \leq \ell'$.

Remarque 19. — Si on sait que $u_n < v_n$ pour tout n (à partir d'un certain rang), on NE PEUT PAS en déduire que $\ell < \ell'$ mais seulement que $\ell \leq \ell'$. Penser par exemple à $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n+1}$.

Théorème 20. — Théorème d'encadrement ou « des gendarmes » (admis)

Soit (u_n) , (d_n) et (g_n) trois suites réelles. On suppose que :

- pour tout entier n (à partir d'un certain rang), $g_n \leq u_n \leq d_n$;
- les suites (g_n) et (d_n) **convergent vers la même limite** i.e. qu'il existe un réel ℓ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \ell$.

Alors, (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exemple 21. — Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{n + \cos(n)}{2n + (-1)^n}$. Étudier la limite de la suite (u_n) .

Théorème 22. — Théorèmes de comparaison

Soit (u_n) et (a_n) deux suites réelles. Soit $N \in \mathbb{N}$.

1. Si, pour tout $n \geq N$, $a_n \leq u_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
2. Si, pour tout $n \geq N$, $u_n \leq a_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

Exemple 23. — Étudier le comportement asymptotique des suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n + \sin n$ et $v_n = (-1)^n - n$.

Propriété 24. — (Démonstration de cours)

Soit q un réel.

- Si $q \leq -1$ alors (q^n) diverge.
- Si $|q| < 1$ (i.e. si $-1 < q < 1$) alors (q^n) converge vers 0.
- Si $q = 1$ alors (q^n) est constante égale à 1 donc converge vers 1.
- Si $q > 1$ alors (q^n) diverge vers $+\infty$.

3.2 Théorème des suites monotones

Théorème 25. — (Démonstration de cours)

1. Une suite réelle croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.
2. Une suite réelle décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

Théorème 26. — (Admis)

1. Une suite réelle croissante et majorée par un réel M converge vers un réel $\ell \leq M$.
2. Une suite réelle décroissante et minorée par un réel m converge vers un réel $\ell \geq m$.

Remarque 27. — Il n'y a aucune raison *a priori* pour que, dans ce théorème, $\ell = M$ ou $\ell = m$ et ce pour la bonne et simple raison que si (u_n) est majorée par M (resp. minorée par m), elle l'est aussi par tout réel $M' \geq M$ (resp. par tout réel $m' \leq m$).

Propriété 28. — (Démonstration de cours)

Si (u_n) est une suite croissante convergeant vers ℓ alors (u_n) est majorée par ℓ .

Exemple 29. Soit $a \in]0; 1[$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.

1. Étudier les variations de (u_n) .
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.
3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?