

Corrigé du TD de de la semaine du 16 mars

1. a. La fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme somme, composée et produit de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = 1 \times \ln(x+1) + (x+1) \times \frac{1}{x+1} - 2 = \ln(x+1) + 1 - 2 = \ln(x+1) - 1.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$,

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) \geq 1 \Leftrightarrow x+1 \geq e \Leftrightarrow x \geq e-1$$

donc $g'(x) \geq 0$ si $x \in [e-1; +\infty[$ et $g'(x) \leq 0$ si $x \in [0; e-1]$. De plus, g' ne s'annule qu'en $e-1$.

On conclut donc que g est strictement décroissante sur $[0; e-1]$ et strictement croissante sur $[e-1; +\infty[$.

- b. Remarquons que, pour tout $x \geq 0$,

$$g(x) = x(\ln(x+1) - 2) + \ln(x+1).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = +\infty$, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$ et, par somme, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) - 2 = +\infty$.

Dès lors, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln(x+1) - 2) = +\infty$ et, par somme, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty}$.

- c. Remarquons que $g(0) = 0$ donc, pour tout $x \in]0; e-1]$, $g(x) < 0$ donc il n'existe pas de réel $x \in]0; e-1]$ tel que $g(x) = 0$.

Sur $[e-1; +\infty[$, g est dérivable donc continue et strictement croissante. De plus, $g(e-1) = -e < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty$ donc $0 \in [g(e-1); \lim_{x \rightarrow +\infty} g]$. On conclut donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

Étant donné que $g(3,9) \approx -0,01 < 0$ et que $g(3,95) \approx 0,01 > 0$ donc la valeur arrondie de α à 0,1 près est $\boxed{\alpha \approx 3,9}$.

- d. On a vu que $g(x) < 0$ pour tout $x \in]0; e-1]$. De plus, sur $[e-1; +\infty[$, g est strictement croissante et $g(\alpha) = 0$ donc $g(x) < 0$ si $x \in [e-1; \alpha[$ et $g(x) > 0$ si $x \in [\alpha; +\infty[$.

Finalement, on conclut que $\boxed{g(x) < 0 \text{ si } x \in]0; \alpha], g(\alpha) = 0 \text{ et } g(x) > 0 \text{ si } x \in]\alpha; +\infty[}$.

2. a. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient et composée de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{x+1}\sqrt{x} - \ln(x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}^2} \\ &= \frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} - \ln(x+1) \times (x+1)}{2\sqrt{x} \times (x+1) \times x} \\ &= \frac{2x - (x+1)\ln(x+1)}{2x(x+1)\sqrt{x}} \end{aligned}$$

i.e.

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}.$$

- b. Pour tout $x > 0$, $2x(x+1)\sqrt{x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le signe de $-g(x)$. On déduit donc de la question 1.d. que $f'(x) \geq 0$ si $x \in]0; \alpha]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\alpha; +\infty[$. Par suite, f est croissante sur $]0; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

- c. Pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \ln(x+1) = \frac{\sqrt{x}}{x} \times \ln(x+1) = \sqrt{x} \times \frac{\ln(x+1)}{x}.$$

Or, d'une part, comme la racine carrée est continue en 0, $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ et, d'autre part, par théorème, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ donc, par produit, $\lim_0 f = 0$.

- d. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(x \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(x) + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x}^2) + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \\ &= 2 \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \end{aligned}$$

donc, pour tout $x > 0$, $f(x) = 2 \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$.

D'une part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et, par théorème, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 0$.

D'autre part, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ et, comme $\ln$ est continue en 1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$ donc, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = 0$.

Par somme, on conclut que $\lim_{+\infty} f = 0$.

- e. Par définition, $g(\alpha) = 0$ donc $(\alpha+1) \ln(\alpha+1) - 2\alpha = 0$ i.e. $\ln(\alpha+1) = \frac{2\alpha}{\alpha+1}$. Dès lors,

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2\alpha}{(\alpha+1)\sqrt{\alpha}} = \frac{2\sqrt{\alpha}^2}{(\alpha+1)\sqrt{\alpha}}$$

i.e. $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$.

On déduit des questions précédentes le tableau de variation suivant :

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f			

3. a. Considérons la proposition $\mathcal{P}(n) : \ll 0,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1 \gg$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2) \approx 0,69$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.

Alors, $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$. Or, f est croissante sur $]0; \alpha]$ et $\alpha \approx 3,9 > 1$ donc f est croissante sur $[0,5; 1]$ et ainsi $f(0,5) \leq f(u_k) \leq f(u_{k+1}) \leq f(1)$. Or, $f(0,5) \approx 0,57 > 0,5$, $f(u_k) = u_{k+1}$, $f(u_{k+1}) = u_{k+2}$ et $f(1) = \ln(2) \approx 0,69 < 1$ et on en déduit que $0,5 \leq u_k \leq u_{k+1} \leq 1$ i.e. $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Ainsi, on a montré par récurrence que, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, 0,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1}$.

b. D'après la question précédente, (u_n) est décroissante et minorée par 0,5 donc, d'après le théorème des suites monotones, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell \geq 0,5}$.

c. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \in]0; +\infty[$ et comme f est continue (car dérivable) sur $]0; +\infty[$, par propriété, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = u_{n+1}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$. Ainsi, par unicité de la limite de $(f(u_n))$, $f(\ell) = \ell$. Or, $f(0,5) \approx 0,57$ donc $f(0,5) \neq 0,5$. Ainsi, $\boxed{\ell \neq 0,5}$.