

TD de la semaine du 16 mars

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\forall x \geq 0 \quad g(x) = (x+1) \ln(x+1) - 2x.$$

- a. Étudier les variations de g sur $[0; +\infty[$.
 - b. Étudier la limite de g au voisinage de $+\infty$.
 - c. Démontrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $]0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et donner la valeur de α arrondie au dixième.
 - d. Déterminer le signe de $g(x)$ pour tout réel $x > 0$.
2. a. Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et démontrer que

$$\forall x > 0 \quad f'(x) = -\frac{g(x)}{2x(x+1)\sqrt{x}}.$$

- b. En déduire les variations de f sur $]0; +\infty[$.
- c. En utilisant le fait que, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$, déterminer la limite de f en 0.
- d. Démontrer que

$$\forall x > 0 \quad f(x) = 2\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

et en déduire la limite de f en $+\infty$.

- e. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha+1}$ et dresser le tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- a. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0,5 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1$.
 - b. En déduire que (u_n) converge vers un réel $\ell \geq 0,5$.
 - c. A-t-on $\ell = 0,5$?