

Corrigé du TD « Fonctions trigonométriques »

Exercice 2

1. a. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors, en utilisant la 2π -périodicité de la fonction $\cos$,

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= [\cos(x+2\pi)]^3 - \frac{3}{8} \cos(2(x+2\pi)) \\ &= [\cos(x)]^3 - \frac{3}{8} \cos(2x + 2 \times 2\pi) \\ &= \cos^3(x) - \frac{3}{8} \cos(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est 2π -périodique.

- b. Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant la parité de la fonction $\cos$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= [\cos(-x)]^3 - \frac{3}{8} \cos(2(-x)) \\ &= [\cos(x)]^3 - \frac{3}{8} \cos(-2x) \\ &= \cos^3(x) - \frac{3}{8} \cos(2x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

donc f est paire.

- c. Par 2π -périodicité, on peut n'étudier f que sur un intervalle de longueur 2π , par exemple $[-\pi; \pi]$. Par parité, on peut restreindre l'étude à $[0; \pi]$ et compléter par symétrie. Plus précisément, comme f est paire, la courbe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et comme f est 2π -périodique, la courbe de f est constitué d'un motif de longueur 2π qui se répète par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ (où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire dirigeant l'axe des abscisses).
2. a. Comme la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$, $x \mapsto \cos^3(x)$ et $x \mapsto \cos(2x)$ sont dérivable sur I donc f est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \times (-\sin(x)) \times \cos^2(x) - \frac{3}{8} \times 2(-\sin(2x)) \\ &= -3 \sin(x) \cos^2(x) + \frac{3}{4} \sin(2x). \end{aligned}$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$ donc, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x) + \frac{3}{2} \sin(x) \cos(x)$$

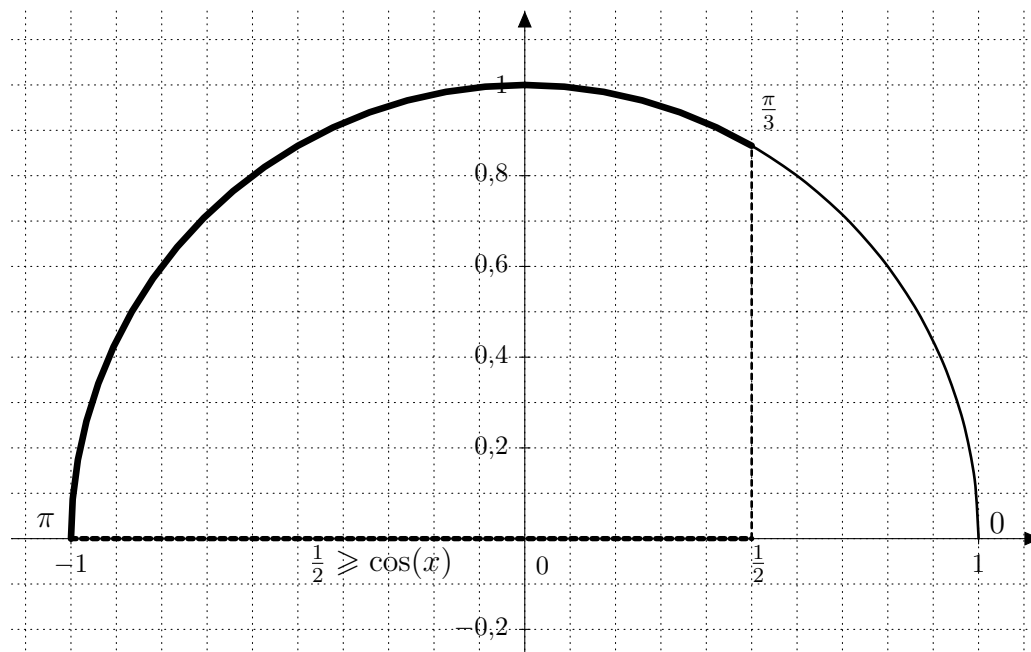
et donc, en factorisant par $3 \sin(x) \cos(x)$, il vient, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 3 \cos(x) \sin(x) \left(\frac{1}{2} - \cos(x) \right).$$

- b. Sur l'intervalle I , la fonction sinus est toujours positive et la fonction cosinus est positive sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis négative sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Étudions le signe de $\frac{1}{2} - \cos(x)$. Pour tout $x \in I$,

$$\frac{1}{2} - \cos(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \geq \cos(x)$$



Ainsi, pour tout $x \in I$, $\frac{1}{2} - \cos(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
signe de $\sin(x)$	+	+	+		
signe de $\cos(x)$	+	+	0	−	
signe de $\frac{1}{2} - \cos(x)$	−	0	+	+	
signe de $f'(x)$	−	0	+	0	−

Ainsi, $f'(x) \leq 0$ si $x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ et $f'(x) \geq 0$ si $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Variations de f	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{11}{8}$

3. Soit $a \in I$ et T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a . Comme f est dérivable en a , le coefficient directeur de T_a est $f'(a)$. La question revient donc à savoir s'il existe $a \in I$ tel que $f'(a) = -1$.

Or, la fonction $f' : x \mapsto 3 \sin(x) \cos(x) \left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right)$ est continue sur I par produit de fonctions continues sur I . De plus, $f'(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $f'(\frac{2\pi}{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx -1,3$ et ainsi $-1 \in \left[f'(\frac{2\pi}{3}); f'(\frac{\pi}{2})\right]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe (au moins) un réel $a \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right]$ tel que $f'(a) = -1$. Comme $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}\right] \subset I$, on en déduit qu'il existe $a \in I$ tel que $f'(a) = -1$.

On conclut qu'il existe un réel $a \in I$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ait un coefficient directeur égal à -1 .

Exercice 3

1. a. Étant donné que

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

on a $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$. Comme de plus,

$0 \leq \frac{\pi}{8} \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geq 0$. On conclut donc que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$

et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$ i.e. $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}}$.

b. D'une part,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 0 \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + 1 \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

donc $\boxed{\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

D'une part,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 \times \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 0 \times \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

donc $\boxed{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}$.

c. On en déduit que

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)\sin^3\left(\frac{\pi}{8}\right) = \left(\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}\right)^4 = \frac{(2 - \sqrt{2})^2}{16} = \frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{16}$$

i.e. $\boxed{f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 - 2\sqrt{2}}{8}}$ De même,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3\pi}{8}\right) &= \cos\left(\frac{9\pi}{8}\right)\sin^3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{8}\right)\sin^3\left(\frac{3\pi}{8}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\sin^3\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}\right)^4 \\ &= -\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{16} = -\frac{4 + 4\sqrt{2} + 2}{16} \end{aligned}$$

i.e. $\boxed{f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{3 + 2\sqrt{2}}{8}}$

