

Fonctions trigonométriques

Exercice 1. — Dans chaque cas, étudier la limite en 0 de f .

1. $f : x \mapsto \frac{\sin(2x)}{x}$;
2. $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x}$;
3. $f : x \mapsto \frac{\cos(x) - 1}{x^2}$. (*Indication.* Utiliser que, pour tout réel t , $\cos(2t) = 1 - 2\sin^2(t)$.)

Exercice 2. — On considère la fonction $f : x \mapsto \cos^3(x) - \frac{3}{8}\cos(2x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que f est 2π -périodique.
 b. Démontrer que f est paire.
 c. Dédire des questions précédentes qu'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $I = [0; \pi]$.
2. a. Justifier que f est dérivable sur I et montrer que, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = 3\cos(x)\sin(x)\left(\frac{1}{2} - \cos(x)\right).$$

- b. Étudier en détail le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in I$.
 - c. En déduire le tableau de variation de f sur I .
3. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Existe-t-il un réel $a \in I$ tel que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a ait un coefficient directeur égal à -1 ?

Exercice 3. — On considère la fonction $f : x \mapsto \cos(3x)\sin^3(x)$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. a. Démontrer que $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
 b. En remarquant que $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, démontrer les égalités :

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

- c. Dédire des questions précédentes les valeurs exactes de $f\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $f\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
2. a. Justifier qu'on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
 b. Démontrer que, pour tout $x \in I$, $f'(x) = 3\cos(4x)\sin^2(x)$.
 c. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in I$ puis dresser le tableau de variation f sur I .