

◆ Quelques rappels sur les variables aléatoires

1 Variable aléatoire

1.1 Un exemple pour commencer

Exemple 1. — On considère le jeu suivant. On lance un dé équilibré et on fixe la règle suivante :

1. si on obtient 1, 2 ou 3, on perd 1 euro ;
2. si on obtient 4, on ne gagne rien ;
3. si on obtient 5, on gagne 1 euro ;
4. si on obtient 6, on gagne 2 euros.

Ainsi, en fixant la règle, on donne un procédé qui permet d'associer, à chaque événement élémentaire de l'expérience, un nombre (qui est ici une somme d'argent gagnée ou perdue).

Il y a ici deux ensembles à bien distinguer : l'univers de l'expérience aléatoire $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et l'ensemble des sommes d'argent associées $E = \{-1, 0, 1, 2\}$. D'un point de vue mathématique, fixer la règle ci-dessus revient à définir une fonction de Ω dans E : à chaque élément de Ω , on associe un nombre et un seul appartenant à E .

1.2 Définition et notations

Définition 2. — On considère une expérience aléatoire dont l'univers est un ensemble Ω . Une variable aléatoire sur Ω est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, la donnée d'une variable aléatoire sur Ω est la donnée d'un procédé qui permet d'associer, à chaque issue de l'expérience, un unique nombre réel.

En général, une variable aléatoire est notée avec une lettre majuscule et on utilise le plus souvent la lettre X .

Remarque 3. — Les valeurs prises par une variable aléatoire sont *a priori* des réels quelconques (ils peuvent être positifs ou négatifs, entiers ou non).

Notation. — L'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X sur l'univers Ω se note $X(\Omega)$.

Exemple 4. — Dans l'exemple 1, la variable aléatoire est définie sur l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ par $X(1) = X(2) = X(3) = -1$, $X(4) = 0$, $X(5) = 1$ et $X(6) = 2$. L'ensemble des valeurs prises par X est donc $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$.

Définition 5. — On considère une variable aléatoire X définie sur un univers Ω . Soit a un réel quelconque. On définit

1. l'événement $(X = a)$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) = a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X vaut a .
2. l'événement $(X \leq a)$: c'est l'ensemble des éléments t de Ω tels que $X(t) \leq a$; autrement dit, c'est l'ensemble de toutes les issues de l'expérience pour lesquelles la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à a .

On définit de façon analogue les événements $(X < a)$, $(X \geq a)$ et $(X > a)$.

Remarque 6.

1. Il faut bien comprendre que ce sont des événements et ce sont donc des parties de l'univers Ω même si a lui n'appartient pas à Ω .
2. On note le plus souvent $p(X = a)$ la probabilité de l'événement $(X = a)$.

Proposition 7. — Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω . Si $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ alors les événements $(X = x_1)$, $(X = x_2)$, ..., $(X = x_k)$ forment une partition de l'univers i.e. ce sont des événements deux à deux disjoints dont l'union est égale à Ω .

1.3 Loi de probabilité d'une variable aléatoire sur un univers fini

Définition 8. — Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω .

Déterminer la loi de probabilité de X , c'est déterminer toutes les probabilités $p(X = a)$ lorsque a prend toutes les valeurs possibles dans $X(\Omega)$.

Exemple 9. — Considérons la variable aléatoire X définie dans l'exemple 4. Alors, $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$. L'événement $(X = -1)$ est égale à $\{1, 2, 3\}$ donc $p(X = -1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. L'événement $(X = 0)$ est égal à $\{4\}$ donc $p(X = 0) = p(4) = \frac{1}{6}$. De même, $p(X = 1) = p(5) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 2) = P(6) = \frac{1}{6}$. On peut résumer cette loi par le tableau suivant :

x_i	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

1.4 Espérance, variance, écart-type

Définition 10. — Soit X une variable aléatoire définie sur un univers fini Ω muni d'une probabilité p . On suppose que la loi de X est donnée par le tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$p(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

On définit l'espérance de X , notée $E(X)$, par

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \dots + p_k \times x_k$$

ce qui peut aussi s'écrire $E(X) = \sum_{i=1}^k p_i \times x_i$.

On définit la variance de X , notée $V(X)$, par

$$V(X) = p_1 \times (x_1 - E(X))^2 + p_2 \times (x_2 - E(X))^2 + \dots + p_k \times (x_k - E(X))^2$$

ce qui peut aussi s'écrire $V(X) = \sum_{i=1}^k p_i \times (x_i - E(X))^2$.

On définit l'écart-type de X , noté σ_X ou $\sigma(X)$, par

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Theoreme 11. — Soit X une variable aléatoire. On note X^2 la variable définie sur Ω par $X^2(t) = [X(t)]^2$ pour tout $t \in \Omega$. Alors,

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Proposition 12. — Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω fini. Soit a et b deux réels. Alors,

1. $E(aX + b) = aE(X) + b$;
2. $V(aX + b) = a^2V(X)$;
3. $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Exemple 13. — On reprend la variable aléatoire X définie dans l'exemple 4. L'univers de l'expérience est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $X(\Omega) = \{-1, 0, 1, 2\}$. La loi de probabilité de X est donnée par le tableau

x_i	-1	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

L'espérance de cette variable aléatoire est donc $E(X) = \frac{1}{2} \times (-1) + \frac{1}{6} \times 0 + \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{6}$ soit $E(X) = 0$.

La loi de probabilité de X^2 est donnée par le tableau

x_i	$(-1)^2$	0^2	1^2	2^2
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

i.e. puisque $(-1)^2 = 1$,

x_i	0	1	4
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Ainsi, l'espérance de X^2 est $E(X^2) = \frac{1}{6} \times 0 + \frac{2}{3} \times 1 + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{4}{3}$. On en déduit que la variance de X est $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{4}{3} - 0^2$ i.e. $V(X) = \frac{4}{3}$ et donc l'écart-type X est $\sigma_X = \sqrt{\frac{4}{3}}$ i.e. $\sigma_X = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

2 Loi binomiale

2.1 Loi de Bernoulli

Définition 14. — Une expérience (ou une épreuve) de Bernoulli¹ de paramètre p est une expérience aléatoire ayant exactement deux issues appelées *succès* (notée S) et *échec* (notée $\bar{S}$) et telle que la probabilité de S soit égale à p .

Exemple 15. — 1) L'exemple standard est l'expérience qui consiste à lancer une pièce de monnaie en prenant, par exemple, comme *succès* S : « Obtenir *pile* ». Si la pièce est parfaitement équilibrée, le paramètre de cette épreuve est $p = \frac{1}{2}$.

2) En fait, n'importe quelle expérience aléatoire peut être considérée comme une épreuve de Bernoulli. Il suffit pour cela de choisir un événement comme *succès*. Par exemple, lancer un dé équilibré en prenant comme *succès* S : « Obtenir 6 » constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Avec la même expérience aléatoire, on peut définir une autre épreuve de Bernoulli en changeant de *succès*. Par exemple, en prenant S : « Obtenir un nombre impair », on obtient une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Définition 16. — Étant donnée une expérience de Bernoulli de paramètre p , on peut considérer la variable aléatoire X égale à 1 en cas de *succès* et à 0 en cas d'*échec*. La variable aléatoire X est appelée variable de Bernoulli de paramètre p et sa loi est appelée la loi de Bernoulli de paramètre p .

Ainsi, par définition, X est une variable aléatoire qui ne prend que deux valeurs : 0 et 1 et telle que $P(X = 1) = P(S) = p$ et $P(X = 0) = P(\bar{S}) = 1 - p$. La loi de X est donc donnée par le tableau ci-contre.

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1 - p$	p

Proposition 17. — Soit X une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre p . Alors, l'espérance et la variance de X sont :

$$\boxed{E(X) = p} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = p(1 - p)}.$$

2.2 Loi binomiale

Définition 18. — On appelle schéma de Bernoulli (de paramètres n et p) la répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p identiques et indépendantes. La variable aléatoire X égale au nombre de *succès* obtenus est alors appelée une variable aléatoire binomiale.

Exemple 19. — Représentation par un arbre dans le cas où $n = 2$ ou $n = 3$.

Définition 20. — Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins contenant exactement k succès dans l'arbre associé à un schéma de Bernoulli de premier paramètre n . Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés les coefficients binomiaux.

Proposition 21 (Hors programme). — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Proposition et définition 22. — Soit X une variable aléatoire binomiale associée à un schéma de Bernoulli de paramètres n et p . Alors, l'ensemble des valeurs prises par X est $\llbracket 0, n \rrbracket$ et la loi de X est définie par :

$$\boxed{\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}}.$$

Cette loi est appelée la loi binomiale de paramètres n et p . On la note $\mathcal{B}(n, p)$.

Proposition 23. — Soit X variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p . Alors,

$$\boxed{E(X) = np} \quad \text{et} \quad \boxed{V(X) = np(1 - p)}.$$

Calcul pratique. — Si X suit une loi binomiale, les nombres $P(X = k)$ ainsi que de $P(X \leq k)$ peuvent se calculer à l'aide de la calculatrice (voir manuel p. 412 pour les T.I. et p. 417 pour les Casio).

1. En mémoire de Jacques Bernoulli [Bâle 1654–1705] premier d'une « dynastie » de mathématiciens et physiciens suisses. Son frère Jean [Bâle 1667–1748], également mathématicien, fût le professeur de L. Euler.

3 Exercices

Exercice 1. — On considère un jeu pour lequel la mise est 1€. À ce jeu, il y a 3 possibilités : on peut gagner 10€ avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$, on peut gagner 1€ avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ et on peut ne rien gagner. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique. Déterminer la loi de probabilité de X puis calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Exercice 2. — On lance simultanément 2 dés cubiques bien équilibrés. On note X la variable aléatoire égale à la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres obtenus. Par exemple, si on a obtenu 2 sur un dé et 5 sur l'autre alors X prend la valeur $5 - 2 = 3$. Si on a obtenu le même chiffre sur les deux dés, alors X vaut 0.

En s'aidant, par exemple, d'un tableau donnant les valeurs prises par X selon les nombres obtenus sur chaque dé,

1. déterminer l'ensemble des valeurs prises par X ;
2. déterminer la loi de probabilité de X ;
3. calculer l'espérance et l'écart-type de X .

Exercice 3. — On dispose d'une urne contenant 3 boules rouges et 2 boules vertes. On considère le jeu suivant. On effectue 4 tirages successifs avec remise d'une boule dans l'urne. Si on a tiré plus de boules vertes que de boules rouges, on gagne 5 €, si on a tiré autant de boules rouges que de boules vertes, on gagne 2 € et si on a tiré plus de boules rouges que de boules vertes, on ne gagne rien. Pour jouer, il faut miser 2 €. On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique pour une partie.

1. Déterminer la loi de probabilité de G et résumer les résultats dans un tableau.
2. Calculer l'espérance de G . Le jeu est-il équitable ?

Exercice 4. — Une urne contient des boules noires et des boules blanches. Le nombre de boules noires est le triple du nombre de boules blanches.

1. On tire une boule au hasard. Quelle est la probabilité que cette boule soit noire ?
2. On tire à présent trois boules successivement avec remise. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules noires tirées sur l'ensemble de trois tirages.
Déterminer la loi de probabilité de X .
Quelle est la probabilité de tirer au moins 2 boules noires ?

Exercice 5. — On lance simultanément 6 dés cubiques bien équilibrés.

1. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus. Quelle est la loi de X ? (Justifier.)
2. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois 6 ?
3. Quelle est la probabilité d'obtenir entre trois et cinq 6 ?
4. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

Exercice 6. — Un Q.C.M. comporte 5 questions. Pour chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte. On suppose qu'on répond au hasard à ce Q.C.M. On note X la variable aléatoire égale au nombre de réponses correctes.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 réponses correctes ?
3. Déterminer l'espérance de X et en donner une interprétation.