

Correction de l'interrogation écrite n°6 – Sujet A

Exercice 1

1. Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : u_n \leq u_{n+1} \leq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{3 \times 0 + 4} = 2$ donc $u_0 \leq u_1 \leq 4$ ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $u_k \leq u_{k+1} \leq 4$ donc, comme $3 > 0$, $3u_k \leq 3u_{k+1} \leq 12$ donc $3u_k + 4 \leq 3u_{k+1} + 4 \leq 16$.
Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{3u_k + 4} \leq \sqrt{3u_{k+1} + 4} \leq \sqrt{16}$
i.e. $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 4$. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
2. La question précédente assure que (u_n) est croissante et majorée par 4 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge.
3. Notons ℓ la limite de (u_n) . Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 3u_n + 4$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = 3\ell + 4$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}^2) , on en déduit que $\ell^2 = 3\ell + 4$ i.e. $\ell^2 - 3\ell - 4 = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne deux valeurs possibles pour ℓ : -1 ou 4 . Or, (u_n) est croissante donc elle est minorée par $u_0 = 0$ ce qui assure que $\ell \geq 0$. On conclut donc que $\boxed{\ell = 4}$.

Exercice 2

1. L'affirmation est fausse. Par exemple, la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = (-1)^n$ est bornée par -1 et 1 mais est divergente.
2. L'affirmation est fausse. Par exemple, la suite (u_n) est définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-2)^n$ n'est pas majorée mais diverge sans avoir de limite.

Correction de l'interrogation écrite n°6 – Sujet B

1. Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{2 \times 0 + 3} = \sqrt{3}$ donc $u_0 \leq u_1 \leq 3$ ce qui montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$.
Alors, $u_k \leq u_{k+1} \leq 3$ donc, comme $2 > 0$, $2u_k \leq 2u_{k+1} \leq 6$ donc $2u_k + 3 \leq 2u_{k+1} + 3 \leq 9$.
Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$, $\sqrt{2u_k + 3} \leq \sqrt{2u_{k+1} + 3} \leq \sqrt{9}$
i.e. $u_{k+1} \leq u_{k+2} \leq 3$. Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie et on a démontré par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
2. La question précédente assure que (u_n) est croissante et majorée par 3 donc, d'après le théorème des suites monotones, (u_n) converge.
3. Notons ℓ la limite de (u_n) . Alors, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell$ donc, par produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = \ell^2$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 = 2u_n + 3$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^2 = 2\ell + 3$. Par unicité de la limite de (u_{n+1}^2) , on en déduit que $\ell^2 = 2\ell + 3$ i.e. $\ell^2 - 2\ell - 3 = 0$. La résolution de cette équation du second degré donne deux valeurs possibles pour ℓ : -1 ou 3 . Or, (u_n) est croissante donc elle est minorée par $u_0 = 0$ ce qui assure que $\ell \geq 0$. On conclut donc que $\boxed{\ell = 3}$.

Exercice 2

1. L'affirmation est vraie. Soit (u_n) une suite qui tend vers $+\infty$. Soit un réel A . Alors, par définition, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n > A$ donc A n'est pas un majorant de la suite (u_n) . Ainsi, aucun nombre réel ne majore (u_n) i.e. (u_n) n'est pas majorée.
2. L'affirmation est fausse. Si on considère la suite (u_n) définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$ alors (u_n) est croissante donc monotone mais (u_n) diverge vers $+\infty$.