

Correction de l'interrogation écrite n°22 – Sujet A

Exercice 1. — Dans chaque cas, une primitive de f sur I est la fonction F donnée par :

a) $F : x \mapsto \sin x$

b) $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

c) $F : x \mapsto e^{x^2}$

Exercice 2

$$I = \int_1^2 \frac{t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2t}{t^2 + 2} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(t^2 + 2) \right]_1^2 = \frac{1}{2} [\ln(6) - \ln(3)]$$

soit $\boxed{I = \frac{1}{2} \ln 2}$.

$$J = \int_0^\pi \frac{\cos t}{(3 - 2 \sin t)^3} dt = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{-2 \cos t}{(3 - 2 \sin t)^3} dt = -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(3 - 2 \sin t)^2} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{9} \right]$$

soit $\boxed{J = 0}$.

Exercice 3. — Pour tout $t \in [1; \sqrt{3}]$, $1 \leq t^2 \leq 3$ donc $-3 \leq -t^2 \leq -1$ et, par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-3} \leq e^{-t^2} \leq e^{-1}$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_1^{\sqrt{3}} e^{-3} dt \leq \int_1^{\sqrt{3}} e^{-t^2} dt \leq \int_1^{\sqrt{3}} e^{-1} dt \quad \text{i.e.} \quad (\sqrt{3} - 1)e^{-3} \leq \int_1^{\sqrt{3}} e^{-t^2} dt \leq (\sqrt{3} - 1)e^{-1}.$$

Ainsi, $\boxed{\frac{\sqrt{3} - 1}{e^3} \leq \int_1^{\sqrt{3}} e^{-t^2} dt \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{e}}$.

Correction de l'interrogation écrite n°22 – Sujet B

Exercice 1. — Dans chaque cas, une primitive de f sur I est la fonction F donnée par :

a) $F : x \mapsto -\cos x$

b) $F : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x$

c) $F : x \mapsto e^{x^2}$

Exercice 2

$$I = \int_2^3 \frac{t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2t}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \left[\ln(t^2 + 1) \right]_2^3 = \frac{1}{2} [\ln(10) - \ln(5)] = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{10}{5}\right)$$

soit $\boxed{I = \frac{1}{2} \ln(2)}$.

$$J = \int_0^\pi \frac{\sin t}{(3 + 2 \cos t)^3} dt = -\frac{1}{2} \int_0^\pi \frac{-2 \sin t}{(3 + 2 \cos t)^3} dt = -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{2} \times \frac{1}{(3 + 2 \cos t)^2} \right]_0^\pi = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{25} \right]$$

soit $\boxed{J = \frac{6}{25}}$.

Exercice 3. — Pour tout $t \in [0; \sqrt{2}]$, $0 \leq t^2 \leq 2$ donc $-2 \leq -t^2 \leq 0$ et, par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-2} \leq e^{-t^2} \leq 1$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_0^{\sqrt{2}} e^{-2} dt \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \leq \int_0^{\sqrt{2}} 1 dt \quad \text{i.e.} \quad (\sqrt{2} - 0)e^{-2} \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{2} - 0.$$

Ainsi, $\boxed{\frac{\sqrt{2}}{e^2} \leq \int_0^{\sqrt{2}} e^{-t^2} dt \leq \sqrt{2}}$.