

Correction de l'interrogation écrite n°21 – Sujet A

Exercice 1. — On calcule les carrés des longueurs des trois côtés de ABC :

$$AB^2 = (-2 - (-3))^2 + (-1 - 2)^2 + (9 - 5)^2 = 1 + 9 + 16 = 26$$

$$AC^2 = (0 - (-3))^2 + (1 - 2)^2 + (9 - 5)^2 = 9 + 1 + 16 = 26$$

$$BC^2 = (0 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2 + (9 - 9)^2 = 4 + 4 = 8$$

Il s'ensuit que $AB = AC$ donc ABC est isocèle mais $AB \neq BC$ donc ABC n'est pas équilatéral. De plus, si ABC était rectangle alors, comme il est isocèle en A, il serait rectangle en A et donc BC serait l'hypoténuse i.e. le plus long côté. Ce n'est pas le cas donc ABC n'est pas rectangle.

Exercice 2

1. La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB} (1; 2; 1)$ donc une représentation paramétrique de (AB) est
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

 $t \in \mathbb{R}$.

2. Pour déterminer si $C(1; 0; 1)$ appartient à (AB), on résout le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 1 = 1 + t \\ 0 = -1 + 2t \\ 1 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = \frac{1}{2} \\ t = -1 \end{cases}$$

et, comme les deux premières équations sont incompatibles, (S) n'a pas de solution donc C n'appartient pas à (AB).

3. a. $\overrightarrow{CE} (-2; 1; -1)$ et $\overrightarrow{CF} (-1; 2; 0)$ donc $x_{\overrightarrow{CE}} \times y_{\overrightarrow{CF}} = -2 \times 2 = -4$ et $y_{\overrightarrow{CE}} \times x_{\overrightarrow{CF}} = 1 \times (-1) = -1 \neq -4$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les trois points C, E et F ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

- b. Le plan (CEF) est dirigé par $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ donc une représentation paramétrique de (CEF) est
$$\begin{cases} x = 1 - 2k - k' \\ y = k + 2k' \\ z = 1 - k \end{cases}, (k, k') \in \mathbb{R}^2.$$

- c. Pour étudier l'intersection de (AB) et (CEF), on peut résoudre le système suivant :

$$(T) \begin{cases} 1 + t = 1 - 2k - k' \\ -1 + 2t = k + 2k' \\ 2 + t = 1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1 - k) + 2k + k' = 0 \\ -1 + 2(-1 - k) - k - 2k' = 0 \\ t = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + k + k' = 0 \\ -3 - 3k - 2k' = 0 \\ t = -1 - k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k = -k' + 1 \\ -3 - 3(-k' + 1) - 2k' = 0 \\ t = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -k' + 1 \\ k' = 6 \\ t = -1 - k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -5 \\ k' = 6 \\ t = 4 \end{cases}$$

Comme (T) admet une unique solution, la droite (AB) est sécante au plan (CEF) au point I de paramètre $t = 4$ i.e. $I(5; 7; 6)$

Correction de l'interrogation écrite n°21 – Sujet B

Exercice 1. — On calcule les carrés des longueurs des trois côtés de ABC :

$$AB^2 = (9 - 5)^2 + (-2 - (-3))^2 + (-1 - 2)^2 = 16 + 1 + 9 = 26$$

$$AC^2 = (9 - 5)^2 + (0 - (-3))^2 + (1 - 2)^2 = 16 + 9 + 1 = 26$$

$$BC^2 = (9 - 9)^2 + (0 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2 = 4 + 4 = 8$$

Il s'ensuit que $AB = AC$ donc ABC est isocèle mais $AB \neq BC$ donc ABC n'est pas équilatéral. De plus, si ABC était rectangle alors, comme il est isocèle en A, il serait rectangle en A et donc BC serait l'hypoténuse i.e. le plus long côté. Ce n'est pas le cas donc ABC n'est pas rectangle.

Exercice 2

1. La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB} (1; 1; 2)$ donc une représentation paramétrique de (AB) est
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases},$$

 $t \in \mathbb{R}$.

2. Pour déterminer si $C(1; 1; 0)$ appartient à (AB), on résout le système suivant :

$$(S) \begin{cases} 1 = 2 + t \\ 1 = 1 + t \\ 0 = -1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ 0 = -1 + 2t \end{cases}$$

et, comme les deux premières équations sont incompatibles, (S) n'a pas de solution donc C n'appartient pas à (AB).

3. a. $\overrightarrow{CE} (-1; -2; 1)$ et $\overrightarrow{CF} (0; -1; 2)$ donc $x_{\overrightarrow{CE}} \times y_{\overrightarrow{CF}} = -1 \times (-1) = 1$ et $y_{\overrightarrow{CE}} \times x_{\overrightarrow{CF}} = (-2) \times 0 = 0 \neq 1$ donc les coordonnées de $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, les trois points C, E et F ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

- b. Le plan (CEF) est dirigé par $\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{CF}$ donc une représentation paramétrique de (CEF) est
$$\begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 - 2k - k' \\ z = k + 2k' \end{cases}, (k, k') \in \mathbb{R}^2.$$

- c. Pour étudier l'intersection de (AB) et (CEF), on peut résoudre le système suivant :

$$(T) \begin{cases} 2 + t = 1 - k \\ 1 + t = 1 - 2k - k' \\ -1 + 2t = k + 2k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - k \\ (-1 - k) + 2k + k' = 0 \\ -1 + 2(-1 - k) - k - 2k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - k \\ -1 + k + k' = 0 \\ -3 - 3k - 2k' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - k \\ k = -k' + 1 \\ -3 - 3(-k' + 1) - 2k' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 - k \\ k = -k' + 1 \\ k' = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 \\ k = -5 \\ k' = 6 \end{cases}$$

Comme (T) admet une unique solution, la droite (AB) est sécante au plan (CEF) au point I de paramètre $t = 4$ i.e. $I(6; 5; 7)$