

Correction de l'interrogation écrite n°20 – Sujet A

Exercice 1. — En utilisant la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

Exercice 2. — Étant donné que $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \vec{0}$, on a, grâce à la relation de Chasles, $3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 4(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{BC} - 4\overrightarrow{BD} = \vec{0}$. Finalement, $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires ce qui assure que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 3

1. En utilisant la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EA}$, on a

$$\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$$

donc $\overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA}$.

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{JC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}$.

Enfin, en utilisant la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$,

$$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BK} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF})$$

donc $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

2. On constate que

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{JI} + \frac{1}{4}\overrightarrow{JC} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{JI} + \frac{1}{4}\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JK}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{JC}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont coplanaires et, par suite, les points I, J, K et C sont coplanaires.

Correction de l'interrogation écrite n°20 – Sujet B

Exercice 1. — En utilisant la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}.$$

Exercice 2. — Étant donné que $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AD} = \vec{0}$, on a, grâce à la relation de Chasles, $2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - 3(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}) = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{BD} = \vec{0}$. Finalement, $\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BD}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires ce qui assure que les points B, C et D sont alignés.

Exercice 3

1. En utilisant la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{EA}$, on a

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF}$$

donc $\overrightarrow{NM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA}$.

Par la relation de Chasles, $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{NC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}$.

Enfin, en utilisant la relation de Chasles et le fait que $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF}$,

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BH} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF})$$

donc $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

2. On constate que

$$\frac{1}{4}\overrightarrow{NM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{NC} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BA}\right) + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

donc $\frac{1}{4}\overrightarrow{NM} + \frac{1}{4}\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{NP}$.

Ainsi, les vecteurs $\overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{NC}$ et $\overrightarrow{NP}$ sont coplanaires et, par suite, les points M, N, P et C sont coplanaires.