

Correction de l'interrogation écrite n°19 – Sujet A

Exercice 1. — En utilisant la croissance de $\ln$ et le fait que $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$, on peut écrire :

$$(I_1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \ln\left(\frac{1}{95}\right) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq -\ln(95) \Leftrightarrow n \geq \frac{-\ln(95)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}.$$

Or, $\frac{-\ln(95)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \approx 11,2$ donc l'ensemble des solutions de (I_1) dans $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 12.

Exercice 2

a) Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

b) Première méthode. — Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{x}{1+x^2}$.

Seconde méthode. — Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ donc $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3

1. La fonction f est la différence de la fonction $f_1 : x \mapsto \ln(1+x^2)$ et de la fonction $f_2 : x \mapsto x$. La fonction f_2 est linéaire donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f_1 est la composée de la fonction polynôme $x \mapsto 1+x^2$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $\ln$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$. On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x-1-x^2}{1+x^2} = -\frac{x^2-2x+1}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Ainsi, $f'(x) \leq 0$ pour tout réel x donc f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$.

Par différence, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$.

3. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)\right] - x = \ln(x^2) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) - x \\ &= 2\ln x - x + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right) + \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right). \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = 1$ et, par continuité de la fonction $\ln$, $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$ et ainsi, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}+1\right) = 0$.

- Par théorème, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2\frac{\ln x}{x} - 1 = -1$ et, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(2\frac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$.

Par somme, on conclut que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$.

Correction de l'interrogation écrite n°19 – Sujet B

Exercice 1. — En utilisant la croissance de $\ln$ et le fait que $\ln\left(\frac{1}{5}\right) = -\ln(5) < 0$, on peut écrire :

$$(I_1) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{5}\right)^n \leq \ln\left(\frac{2}{99}\right) \Leftrightarrow -n \ln(5) \leq \ln\left(\frac{2}{99}\right) \Leftrightarrow n \geq -\frac{\ln\left(\frac{2}{99}\right)}{\ln(5)}.$$

Or, $-\frac{\ln\left(\frac{2}{99}\right)}{\ln(5)} \approx 2,4$ donc l'ensemble des solutions de (I_1) dans $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.

Exercice 2

a) Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$.

b) Première méthode. — Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{x}{1+x^2}$.

Seconde méthode. — Pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ donc $f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2}$.

Exercice 3

1. La fonction f est la différence de la fonction $f_1 : x \mapsto x$ et la fonction $f_2 : x \mapsto \ln(1+x^2)$. La fonction f_1 est linéaire donc dérivable sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction f_2 est la composée de la fonction polynôme $x \mapsto 1+x^2$ dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $\ln$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$. On conclut que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x ,

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \frac{x^2-2x+1}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}.$$

Ainsi, $f'(x) \geq 0$ pour tout réel x donc f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} 1+x^2 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$.

Par différence, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$.

3. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \ln\left[x^2\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)\right] = x - \ln(x^2) - \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) \\ &= x - 2\ln x - \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) - \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right). \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} + 1 = 1$ et, par continuité de la fonction $\ln$, $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$ et ainsi, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) = 0$.

- Par théorème, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - 2\frac{\ln x}{x} = 1$ et, par produit, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x\left(1 - 2\frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$.

Par différence, on conclut que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$.