

Correction de l'interrogation écrite n°18 – Sujet A

Exercice 1

- a) $\ln 27 = \ln(3^3)$ donc $\boxed{\ln 27 = 3 \ln 3}$; b) $\ln \frac{1}{9} = -\ln 9 = -\ln 3^2$ donc $\boxed{\ln \frac{1}{9} = -2 \ln 3}$;
- c) $\ln(9\sqrt{3}) = \ln 9 + \ln \sqrt{3} = \ln 3^2 + \frac{1}{2} \ln 3 = 2 \ln 3 + \frac{1}{2} \ln 3$ donc $\boxed{\ln(9\sqrt{3}) = \frac{5}{2} \ln 3}$.

Exercice 2

(E) a un sens si et seulement si $x + 1 > 0$ i.e. $x > -1$ et, pour tout $x > -1$, (E) équivaut à $x + 1 = e^0$ i.e. $x + 1 = 1$ soit encore $x = 0$. L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{0\}$.

(I) a un sens si et seulement si $x + 2 > 0$ i.e. $x > -2$ et, pour tout $x > -2$, (I) équivaut à $x + 2 < e^5$ i.e. $x < e^5 - 2$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (I) est $] -2; e^5 - 2[$.

Exercice 3

1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}$.

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - 2x$. Ainsi, $f'(x) \geq 0$ si $x \in]0; \frac{1}{2}]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$. On conclut que f est croissante sur $]0; \frac{1}{2}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0$ donc, par différence, $\boxed{\lim_0 f = -\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x \left[\frac{\ln x}{x} - 2 \right]$. Or, par théorème, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 2 \right] = -2$ donc, par produit, $\boxed{\lim_{+\infty} f = -\infty}$.

Correction de l'interrogation écrite n°18 – Sujet B

Exercice 1

- a) $\ln 25 = \ln(5^2)$ donc $\boxed{\ln 25 = 2 \ln 5}$; b) $\ln \frac{1}{125} = -\ln 125 = -\ln 5^3$ donc $\boxed{\ln \frac{1}{125} = -3 \ln 5}$;
- c) $\ln(5\sqrt{5}) = \ln 5 + \ln \sqrt{5} = \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 5$ donc $\boxed{\ln(5\sqrt{5}) = \frac{3}{2} \ln 5}$.

Exercice 2

(E) a un sens si et seulement si $x + 2 > 0$ i.e. $x > -2$ et, pour tout $x > -2$, (E) équivaut à $x + 2 = e^0$ i.e. $x + 2 = 1$ soit encore $x = -1$. L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{-1\}$.

(I) a un sens si et seulement si $x + 2 > 0$ i.e. $x > -2$ et, pour tout $x > -2$, (I) équivaut à $x + 2 < e^7$ i.e. $x < e^7 - 2$.

On conclut que l'ensemble des solutions de (I) est $] -2; e^7 - 2[$.

Exercice 3

1. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{x} - 3 = \frac{1-3x}{x}$.

Comme $x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $1 - 3x$. Ainsi, $f'(x) \geq 0$ si $x \in]0; \frac{1}{3}]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [\frac{1}{3}; +\infty[$. On conclut que f est croissante sur $]0; \frac{1}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} 3x = 0$ donc, par différence, $\boxed{\lim_0 f = -\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x \left[\frac{\ln x}{x} - 3 \right]$. Or, par théorème, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x}{x} - 3 \right] = -3$ donc, par produit, $\boxed{\lim_{+\infty} f = -\infty}$.