

Correction de l'interrogation écrite n°17 – Sujet A

Exercice 1

$$\overline{z_1} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = e^{i\frac{\pi}{3}} \text{ donc } \boxed{z_1 = e^{-i\frac{\pi}{3}}}.$$

$$z_2 = -2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] = -2e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi} 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})} \text{ donc } \boxed{z_2 = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}}.$$

$$z_3 = \left[\cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \right]^7 = \left[\overline{\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}} \right]^7 = \left[e^{i\frac{2\pi}{5}} \right]^7 = \left[e^{-i\frac{2\pi}{5}} \right]^7 \text{ soit } \boxed{z_3 = e^{-i\frac{14\pi}{5}} = e^{-i\frac{4\pi}{5}}}.$$

$$z_4 = (2 - \sqrt{5})e^{i\frac{\pi}{3}} = -(\sqrt{5} - 2)e^{i\frac{\pi}{3}} = (\sqrt{5} - 2)e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{3}} = (\sqrt{5} - 2)e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} \text{ soit } \boxed{z_4 = (\sqrt{5} - 2)e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

(il s'agit bien de la forme exponentielle car $\sqrt{5} - 2 > 0$).

Exercice 2

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 2i - (1 + i)}{2 + 3i - (1 + i)} = \frac{-2 + i}{1 + 2i} = \frac{2i^2 + i}{1 + 2i} = i \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = i.$$

On en déduit, d'une part, que $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i|$ i.e. $\frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1$ soit encore $\frac{AC}{AB} = 1$. Ainsi, $AC = AB$ donc ABC est isocèle en A .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} \right) &= \left(\overrightarrow{AB} ; \vec{u} \right) + \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AC} \right) [2\pi] = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AC} \right) - \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AB} \right) [2\pi] \\ &= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) [2\pi] = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi] = \arg(i) [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

donc le triangle ABC est isocèle rectangle en A .

Correction de l'interrogation écrite n°17 – Sujet B

Exercice 1

$$\overline{z_1} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ donc } \boxed{z_1 = e^{-i\frac{\pi}{6}}}.$$

$$z_2 = -2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = -2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\pi} 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i(\pi+\frac{\pi}{3})} \text{ donc } \boxed{z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}}.$$

$$z_3 = \left[\cos \frac{2\pi}{7} - i \sin \frac{2\pi}{7} \right]^5 = \left[\overline{\cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}} \right]^5 = \left[e^{i\frac{2\pi}{7}} \right]^5 = \left[e^{-i\frac{2\pi}{7}} \right]^5 \text{ soit } \boxed{z_3 = e^{-i\frac{10\pi}{7}} = e^{i\frac{4\pi}{7}}}.$$

$$z_4 = (2 - \sqrt{7})e^{i\frac{\pi}{6}} = -(\sqrt{7} - 2)e^{i\frac{\pi}{6}} = (\sqrt{7} - 2)e^{i\pi} e^{i\frac{\pi}{6}} = (\sqrt{7} - 2)e^{i(\pi+\frac{\pi}{6})} \text{ soit } \boxed{z_4 = (\sqrt{7} - 2)e^{i\frac{7\pi}{6}}}$$

(il s'agit bien de la forme exponentielle car $\sqrt{7} - 2 > 0$).

Exercice 2

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1 + 3i - (1 + 2i)}{2 + 4i - (1 + 2i)} = \frac{-2 + i}{1 + 2i} = \frac{2i^2 + i}{1 + 2i} = i \times \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = i.$$

On en déduit, d'une part, que $\left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right| = |i|$ i.e. $\frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1$ soit encore $\frac{AC}{AB} = 1$. Ainsi, $AC = AB$ donc ABC est isocèle en A .

D'autre part,

$$\begin{aligned} \left(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC} \right) &= \left(\overrightarrow{AB} ; \vec{u} \right) + \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AC} \right) [2\pi] = \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AC} \right) - \left(\vec{u} ; \overrightarrow{AB} \right) [2\pi] \\ &= \arg(z_C - z_A) - \arg(z_B - z_A) [2\pi] = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) [2\pi] = \arg(i) [2\pi] \\ &= \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

donc le triangle ABC est isocèle rectangle en A .