

Correction de l'interrogation écrite n°15 – Sujet A

Exercice 1

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction exponentielle définie et non nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $x \mapsto x - 1$ et $\exp$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1 \times e^x - (x - 1) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x + e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2 - x)}{e^{2x}}.$$

3. Comme la fonction $\exp$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $2 - x$. On en déduit que $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty; 2]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [2; +\infty[$ donc f est croissante sur $] -\infty; 2]$ et f est décroissante sur $[2; +\infty[$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$.

Pour tout réel x , $f(x) = \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$. Or, par théorème, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc, par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$. Par différence, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 2

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$. Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^{2x} + 1 = 1 \text{ et donc, par quotient, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}.$$

Pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x} \left(2 + \frac{1}{e^{2x}}\right)} = \frac{1}{2 + \frac{1}{e^{2x}}}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X =$

$+\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$. Dès lors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$ et ainsi, par somme

et quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}}$.

2. Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{2e^{2x}(2e^{2x} + 1) - e^{2x} \times 4e^{2x}}{(2e^{2x} + 1)^2} = \frac{4e^{4x} + 2e^{2x} - 4e^{4x}}{(2e^{2x} + 1)^2}$ c'est-à-dire

$$\boxed{f'(x) = \frac{2e^{2x}}{(2e^{2x} + 1)^2}}.$$

Or, $e^{2x} > 0$ pour tout réel x , donc $f'(x) > 0$ et ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

Correction de l'interrogation écrite n°15 – Sujet B

Exercice 1

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ car elle est le quotient d'une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ et de la fonction exponentielle définie et non nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions $x \mapsto x + 2$ et $\exp$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc, par quotient, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{1 \times e^x - (x + 2) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x - xe^x - 2e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(-1 - x)}{e^{2x}}.$$

3. Comme la fonction $\exp$ est à valeurs strictement positives sur $\mathbb{R}$, le signe de $f'(x)$ est le signe de $-1 - x$. On en déduit que $f'(x) \geq 0$ si $x \in]-\infty; -1]$ et $f'(x) \leq 0$ si $x \in [-1; +\infty[$ donc f est croissante sur $] -\infty; -1]$ et f est décroissante sur $[-1; +\infty[$.

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ donc, par quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$.

Pour tout réel x , $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}$. Or, par théorème, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc, par inverse, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ donc, par quotient, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0$. Par différence, on en déduit que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$.

Exercice 2

1. Comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0$, par composition, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} = 0$. Dès lors,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x} + 2 = 2 \text{ et donc, par quotient, } \boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0}.$$

Pour tout réel x , $f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{3x} \left(1 + \frac{2}{e^{3x}}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{e^{3x}}}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X =$

$+\infty$ donc, par composition, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = +\infty$. Dès lors, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{3x}} = 0$ et ainsi, par somme

et quotient, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$.

2. Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{3e^{3x}(e^{3x} + 2) - e^{3x} \times 3e^{3x}}{(e^{3x} + 2)^2} = \frac{3e^{6x} + 6e^{3x} - 3e^{6x}}{(e^{3x} + 2)^2}$ c'est-à-dire

$$\boxed{f'(x) = \frac{6e^{3x}}{(e^{3x} + 2)^2}}.$$

Or, $e^{3x} > 0$ pour tout réel x , donc $f'(x) > 0$ et ainsi $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.