

Correction de l'interrogation écrite n°14 – Sujet A

Exercice 1

$$\text{a) } e^{3x}e^{-x} = e^{3x-x} = e^{2x} ; \quad \text{b) } e \times e^{-x} = e^{1-x} ; \quad \text{c) } (e^{-x})^2 = e^{-2x} ; \quad \text{d) } \frac{e^{2x}}{e^{2-x}} = e^{2x-(2-x)} = e^{3x-2}.$$

Exercice 2

$$(E) \Leftrightarrow e^x = e^{-2x} \Leftrightarrow x = -2x \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{0\}$.

Par croissance de la fonction exponentielle,

$$(I) \Leftrightarrow x \leq 2 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0.$$

Or, le discriminant de $x^2 + x - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc le trinôme $x^2 + x - 2 = 0$ admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$. Comme $a = 1 > 0$, $x^2 + x - 2$ est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre. On en déduit que l'ensemble des solutions de (I) est $[-2; 1]$.

Exercice 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 1 = -\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0 \text{ donc, par composition, } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0}.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et, par continuité de la fonction exp, } \lim_{X \rightarrow 0} e^X = e^0 = 1 \text{ donc, par composition,}$$

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1}.$$

Exercice 4. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-x} \neq 0$, on obtient :

$$\frac{e^{-x}}{e^x + 1} = \frac{e^{-x} \times e^{-x}}{(e^x + 1) \times e^{-x}} = \frac{e^{-2x}}{1 + e^{-x}}.$$

Correction de l'interrogation écrite n°14 – Sujet B

Exercice 1

a) $e^x e^{-3x} = e^{x-3x} = e^{-2x}$; b) $e \times e^x = e^{1+x}$; c) $(e^x)^{-2} = e^{-2x}$; d) $\frac{e^{2-x}}{e^{2x}} = e^{(2-x)-2x} = e^{2-3x}$.

Exercice 2

$$(E) \Leftrightarrow e^{2x} = e^{-x} \Leftrightarrow 2x = -x \Leftrightarrow 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{0\}$.

Par croissance de la fonction exponentielle,

$$(I) \Leftrightarrow 2 - x^2 \leq x \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + x - 2.$$

Or, le discriminant de $x^2 + x - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$ donc le trinôme $x^2 + x - 2 = 0$ admet deux racines réelles : $x_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$. Comme $a = 1 > 0$, $x^2 + x - 2$ est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre. On en déduit que l'ensemble des solutions de (I) est $] -\infty ; -2] \cup [1 ; +\infty[$.

Exercice 3

$\lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 1 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ donc, par composition, $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty}$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0$ et, par continuité de la fonction exp, $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = e^0 = 1$ donc, par composition,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1}.$$

Exercice 4. — Pour tout $x \in \mathbb{R}$, en multipliant numérateur et dénominateur par $e^{-x} \neq 0$, on obtient :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{(e^x - e^{-x}) \times e^{-x}}{(e^x + e^{-x}) \times e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}.$$