

Intégrales et primitives

Exercice 1. — On considère une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$
Variations de f				

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_0^x f(t) \, dt$.

1. En tenant compte de toutes les informations contenues dans le tableau de variation, tracer une courbe ($\mathcal{C}$) susceptible de représenter f dans le plan muni d'un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm sur l'axe des abscisses, 2 cm sur l'axe des ordonnées).
2. Interpréter graphiquement $g(2)$ puis montrer, sans utiliser la calculatrice, que $0 \leq g(2) \leq 2,5$.
3. Soit un réel $x \geq 2$. Montrer que $g(x) \geq x - 2$ et en déduire la limite de g en $+\infty$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. — On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \, dx.$$

1.
 - a. Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
 - b. Calculer u_1 . En déduire u_0 .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
3.
 - a. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \frac{1 - e^{-n}}{n}$.
 - b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \frac{1}{n}$.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n) .

Exercice 3. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que $\int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, dt \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $H_n \geq \ln(n+1)$ puis déterminer la limite de H_n quand n tend vers $+\infty$.
3. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{t} \, dt$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$.
 - a. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq a_k \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
 - b. En déduire que (S_n) est majorée puis qu'elle converge vers un réel $\gamma \in [0; 1]$. (On ne demande pas déterminer la valeur de γ .)
 - c. En déduire la limite de $H_n - \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.