

Autour de la valeur moyenne

On étudie dans cet exercice l'efficacité d'un traitement médical qui consiste en n injections successives d'un produit dans le sang, le nombre n étant un entier supérieur ou égal à 1. Pour éviter l'apparition d'effets secondaires chez le patient, ces injections sont espacées d'au moins 8 heures.

La concentration du médicament dans le sang, en g/L, x heures après la n -ième injection est modélisée par la fonction f_n définie sur l'intervalle $]0; 7]$ par

$$f_n(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln x}{x^n}.$$

Des études ont montré que le traitement s'avère efficace après la n -ième injection si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (1) $f_n(2) > 0,65$;
- (2) f_n est strictement positive sur l'intervalle $]0; 7]$;
- (3) la concentration moyenne en g/L du médicament dans le sang entre la première heure et la septième heure après la n -ième injection est strictement supérieure à 0,6.

Partie A. — Étude de l'efficacité après une seule injection

1. La fonction f_1 vérifie-t-elle les propriétés (1), (2) et (3) ?
2. Est-il nécessaire de poursuivre les injections pour que le traitement soit efficace ?

Partie B. — Étude de l'efficacité après deux injections

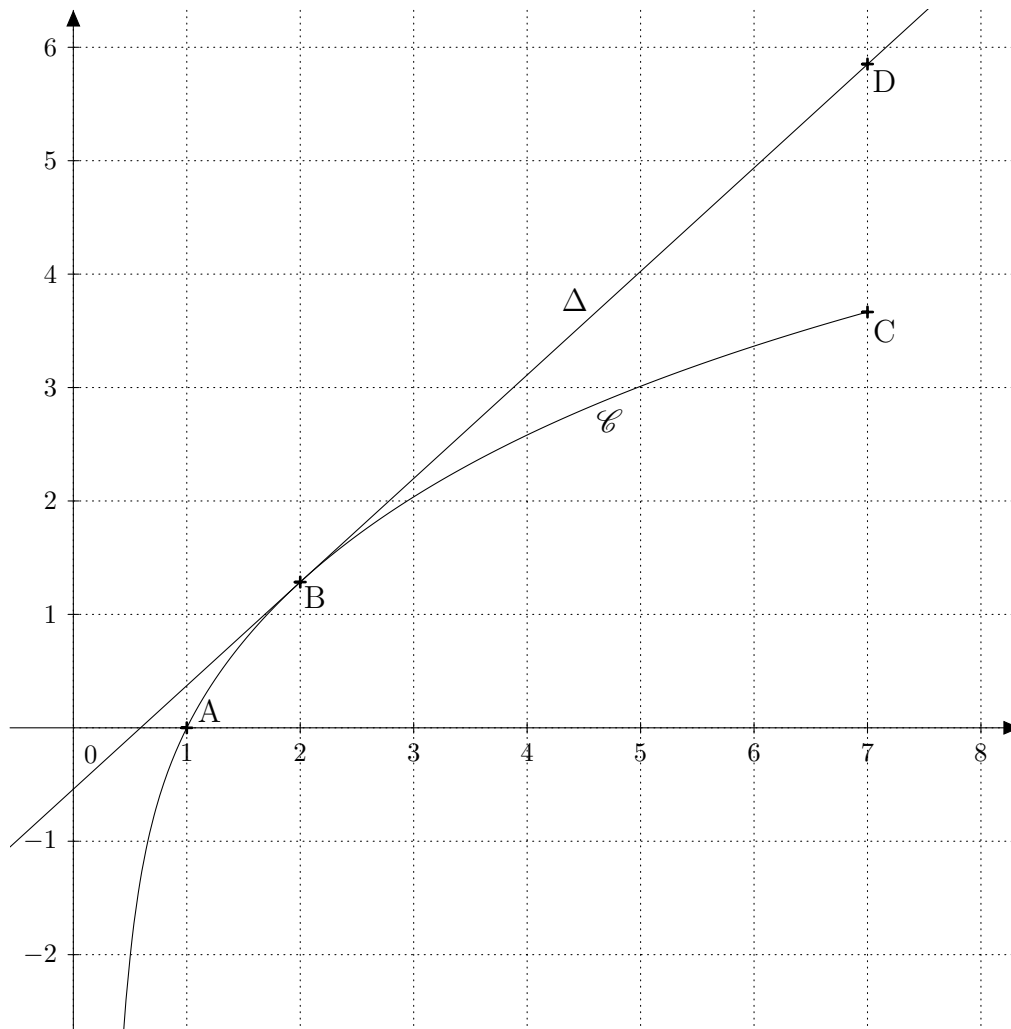
1. La fonction f_2 vérifie-t-elle la propriété (1) ?
2. **a.** Étudier les variations de la fonction u définie sur $]0; 7]$ par $u(x) = 2x - \ln(x)$.
b. La fonction f_2 vérifie-t-elle la propriété (2) ?
3. **a.** Démontrer que la fonction $G : x \mapsto -\frac{\ln x + 1}{x}$ est une primitive de la fonction $g : x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$ sur $]0; +\infty[$.
b. La fonction f_2 vérifie-t-elle la propriété (3) ?
4. Est-il nécessaire de poursuivre les injections pour que le traitement soit efficace ?

Partie C. — Étude de l'efficacité après trois injections

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ d'une fonction F définie et dérivable sur $]0; 7]$ et dont la dérivée est f_3 .

Cette courbe passe par les points A, B et C dont les coordonnées, arrondies à 0,01 près, sont respectivement $(1; 0)$, $(2; 1,29)$ et $(7; 3,67)$.

On a, de plus, tracé la tangente Δ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 2. Cette droite passe par le point D dont les coordonnées, arrondies à 0,01 près, sont $(7; 5,85)$.



Par lecture graphique et d'après les données de l'énoncé, peut-on considérer que le traitement est efficace après 3 injections successives ?