

Autour de la valeur moyenne – Corrigé

Partie A. — Étude de l'efficacité après une seule injection

1. La fonction f_1 est définie, pour tout $x \in]0; 7]$, par $f_1(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = \frac{2 - \ln(x)}{x}$.

Ainsi, $f_1(2) = \frac{2 - \ln(2)}{2} \approx 0,653$ donc f_1 vérifie (1).

Pour tout réel $x \in]0; 7]$, $\ln(x) \leq \ln(7) \approx 1,95$ donc $\ln(x) < 2$ et donc $f_1(x) > 0$. Ainsi, f_1 vérifie (2).

La concentration moyenne du médicament entre la première heure et la septième heure après la première injection est

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{7-1} \int_1^7 f_1(x) \, dx = \frac{1}{6} \int_1^7 \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x} \, dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^7 \frac{1}{x} \, dx - \frac{1}{6} \int_1^7 \underbrace{\frac{1}{x} \ln(x)}_{u'u} \, dx = \frac{1}{3} [\ln(x)]_1^7 - \frac{1}{6} \left[\frac{(\ln(x))^2}{2} \right]_1^7 \\ &= \frac{\ln(7)}{3} - \frac{(\ln(7))^2}{12}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_1 \approx 0,33$ donc f_1 ne vérifie pas la propriété (3).

2. Puisque f_1 ne vérifie pas (3), il est nécessaire de poursuivre les injections pour que le traitement soit efficace.

Partie B. — Étude de l'efficacité après deux injections

1. La fonction f_2 est définie, pour tout $x \in]0; 7]$, par $f_2(x) = \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{2x - \ln(x)}{x^2}$ donc

$f_2(2) = \frac{4 - \ln(2)}{4} \approx 0,86$ donc f_2 vérifie la propriété (1).

2. a. La fonction u est dérivable sur $]0; 7]$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x \in]0; 7]$, $u'(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$. On en déduit que le signe de $u'(x)$ sur $]0; 7]$ est le signe de $2x-1$ i.e. $u'(x) \leq 0$ si $x \in]0; \frac{1}{2}]$ et $u'(x) \geq 0$ si $x \in [\frac{1}{2}; 7]$. Ainsi, u est décroissante sur $]0; \frac{1}{2}]$ puis croissante sur $[\frac{1}{2}; 7]$.
- b. En particulier, u atteint son minimum en $\frac{1}{2}$ et ce minimum vaut $u(\frac{1}{2}) = 1 - \ln(\frac{1}{2}) > 0$ donc u est strictement positive sur $]0; 7]$. Étant donné que, pour tout $x \in]0; 7]$, $f_2(x) = \frac{u(x)}{x}$, on en déduit que f_2 est strictement positive sur $]0; 7]$ i.e. f_2 vérifie la propriété (2).
3. a. La fonction G est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions de fonctions dérivables et

$$\forall x > 0, \quad G'(x) = -\frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln(x) + 1)}{x^2} = -\frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{\ln(x)}{x^2} = g(x)$$

donc G est bien une primitive de g sur $]0; +\infty[$.

- b. La concentration moyenne du médicament entre la première heure et la septième heure après la deuxième injection est

$$\begin{aligned}\mu_2 &= \frac{1}{7-1} \int_1^7 f_2(x) \, dx = \frac{1}{6} \int_1^7 \frac{2}{x} - \frac{\ln(x)}{x^2} \, dx = \frac{1}{6} [2 \ln(x) - G(x)]_1^7 \\ &= \frac{1}{6} \left[2 \ln(7) + \frac{\ln(7) + 1}{7} - (0 + 1) \right] = \frac{5 \ln(7) - 2}{14}\end{aligned}$$

Ainsi, $\mu_2 \approx 0,55$ donc f_2 ne vérifie pas la propriété (3).

4. Puisque f_2 ne vérifie pas (3), il est nécessaire de poursuivre les injections pour que le traitement soit efficace.

Partie C. — Étude de l'efficacité après trois injections

Le nombre dérivée de F en 2 est la pente de Δ . Ainsi,

$$f_3(2) = F'(2) = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} \approx \frac{5,85 - 1,29}{7 - 2} = 0,912.$$

Dès lors, f_3 vérifie la propriété (1).

Graphiquement, la fonction F est strictement croissante sur $]0; 7]$ donc sa dérivée f_3 est strictement positive sur cet intervalle. Ainsi, f_3 vérifie la propriété (2).

La concentration moyenne du médicament entre la première heure et la septième heure après la troisième injection est

$$\mu_3 = \frac{1}{7-1} \int_1^7 f_3(x) \, dx = \frac{1}{6} [F(7) - F(1)] \approx \frac{3,67}{6} \approx 0,61$$

donc f_3 vérifie la propriété (3).

Ainsi, d'après les données de l'énoncé, on peut conclure le traitement est efficace après trois injections successives.