Le raisonnement par récurrence : exercices

Exercice 1. — Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{1+v_n}$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.

2. On définie la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{1}{v_n}$.

- **a.** Démontrer que (u_n) est une suite arithmétique.
- **b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n puis celle de v_n en fonction de n.

Exercice 2. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Démontrer par récurrence que $u_n = 3 - 2^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 3$.

- **a.** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
- **b.** En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de v_n en fonction de n puis retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 3. — Si n est un entier naturel non nul, on pose $S_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4.

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_{n+1} en fonction de S_n.

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 4. — Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n dans les exemples *b)* et *c)* de l'exercice 3 de la fiche **Révision sur les suites réelles**.

Exercice 5. — Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme des n premiers entiers naturels impairs i.e.

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1).$$

1. **a.** Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4. Quelle conjecture peut-on faire ?

- **b.** Démontrer la conjecture précédente par récurrence.

2. En utilisant une suite arithmétique, retrouver directement le résultat de la question 1.b.

3. Comment peut-on visualiser la propriété démontrée dans les questions 1.b. et 2 ?

Exercice 6. — Si n est un entier naturel non nul, on note $n!$ le produit $1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. La notation $n!$ se lit *factorielle n*.
On a donc $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$, $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$, $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$, etc.
Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 7$, $n! > e^n$.

Exercice 7. — Soit $a \in \,]0\,;1[$. On considère la suite définie par $u_0 = a$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 - u_n)$.
Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Exercice 8. — Reprendre l'exercice 8 avec la suite (u_n) définie par $u_0 = a \in \,]0\,;1[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.